

**THESE DE DOCTORAT INGENIEUR : Mathématiques**

**présentée**

**A LA FACULTE DES SCIENCES**

**DE PARIS**  
—

**par**

**Monsieur TREPANT Philippe**  
—  
—

**Ingénieur des Arts et Manufactures  
Master of Sciences, Université de Montréal**

**pour obtenir**

**le grade de DOCTEUR INGENIEUR**  
  
---

**Sujet de la Thèse : IDENTIFICATION DES SYSTEMES : MODELISATION DE LA  
MECANIQUE D'UN MATERIAU ELASTOPLASTIQUE**

**soutenue le 18 Juin 1970**  
—

**devant la Commission d'Examen**

**MM. SOLEILLET**

**Président**

**DESTOUCHES**

**Examineur**

**CLEMENT**

**Examineur**

**POULARD**

**Examineur**



THESE DE DOCTORAT INGENIEUR : Mathématiques

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE PARIS

par

Monsieur TREPANT Philippe

Ingénieur des Arts et Manufactures  
Master of Sciences, Université de Montréal

pour obtenir

le grade de DOCTEUR INGENIEUR

---

Sujet de la Thèse : IDENTIFICATION DES SYSTEMES : MODELISATION DE LA  
MECANIQUE D'UN MATERIAU ELASTOPLASTIQUE

soutenue le 18 Juin 1970

devant la Commission d'Examen

MM. SOLEILLET

Président

DESTOUCHES

Examineur

CLEMENT

Examineur

POULARD

Examineur

Présentée

par M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ

le 15 Juin 1970

par

M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ

Président de la Commission d'Examen : M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ  
Membres : M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ, M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ, M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ

Président de la Commission d'Examen

M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ



Le 15 Juin 1970 : M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ, M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ, M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ

Président de la Commission d'Examen

Le 15 Juin 1970

|                          |             |
|--------------------------|-------------|
| M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ | Président   |
| M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ | Examinateur |
| M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ | Examinateur |
| M. LÉONARD HENRI SCHEFFÉ | Examinateur |

## REMERCIEMENTS.

Qu'il nous soit permis de remercier ici M. le Professeur SOLEILLET d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury. Nous remercions également M. DESTOUCHES, Professeur à la faculté des Sciences de Paris, et M. CLEMENT, Directeur du Département de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Centrale de Paris, dont le dévouement et la compétence ont beaucoup contribué au développement de la partie théorique de ce travail.

Nous adressons également nos plus vifs remerciements à MM. LUTFALLA et POULARD, Chefs de Service et de Section au CEA, qui ont suivi l'évolution des travaux, et dont l'expérience nous a permis d'assurer le succès des applications pratiques.

Enfin nous voudrions témoigner du plaisir que nous avons éprouvé dans nos contacts avec le personnel du Centre d'Etudes de Vaujours et particulièrement avec les agents du Centre de Calcul, dont l'empressement et l'amabilité nous ont beaucoup aidés à mener à bien cette recherche.

---



# TABLE DES MATIERES

|                                                                       | <u>Pages</u> |
|-----------------------------------------------------------------------|--------------|
| INTRODUCTION                                                          | 1            |
| PARTIE 1 : MODELISATION                                               | 5            |
| 1) GENERALITES : NOTIONS DE SYSTEME PHYSIQUE<br>ET DE MODELE.         | 5            |
| A) L'origine de ces notions.                                          | 5            |
| B) La relativité des modèles - Domaine de validité.                   | 7            |
| 2) NOTIONS D'ENTREES, DE VARIABLE D'ETAT,<br>D'OPERATEUR D'EVOLUTION. | 9            |
| 3) LES QUALITES D'UN MODELE.                                          | 10           |
| A) Conditions de contrôlabilité et d'observabilité.                   | 10           |
| B) Mesure de la qualité d'un modèle.                                  | 11           |
| 4) CLASSIFICATION DES MODELES.                                        | 12           |
| PARTIE 2 : PRESENTATION DU SYSTEME PHYSIQUE A<br>MODELISER.           | 16           |
| 1) PRESENTATION GENERALE.                                             | 16           |
| 2) MODELE DE REPRESENTATION EXISTANT - SES FAIBLESSES                 | 17           |
| 3) DOMAINE DE VALIDITE DU MODELE CHERCHE.                             | 19           |
| 4) NATURE DE L'INFORMATION EXPERIMENTALE.                             | 20           |
| 5) TYPE DE MODELE A ENVISAGER.                                        | 20           |
| 6) HYPOTHESE DE MODELISATION : L'HYPOTHESE DE<br>VISCOELASTICITE.     | 21           |
| 7) PROBLEME MATHEMATIQUE POSE.                                        | 22           |



|                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| PARTIE 3 : LE PROBLEME DU CONTROLE OPTIMAL                                                       | 28 |
| 1) PRESENTATION DU PROBLEME DU CONTROLE OPTIMAL.                                                 | 28 |
| 2) CONTROLE OPTIMAL ET CALCUL DES VARIATIONS.                                                    | 30 |
| 3) APPROCHE PAR L'ANALYSE FONCTIONNELLE DANS LES ESPACES ABSTRAITS.                              | 32 |
| A) Hypothèses préliminaires.                                                                     | 32 |
| B) Transposition du problème du contrôle optimal en termes d'analyse dans les espaces abstraits. | 33 |
| C) Définitions des différentielles et des gradients en espace fonctionnel.                       | 34 |
| D) Règle des multiplicateurs de Lagrange.                                                        | 37 |
| E) Calcul des gradients.                                                                         | 42 |
| F) Utilisation de la règle des multiplicateurs.<br>Formule d'Euler Lagrange.                     | 44 |
| 4) APPROCHE PAR LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE.                                                      | 45 |
| PARTIE 4 : ALGORITHMES.                                                                          | 52 |
| 1) INTRODUCTION.                                                                                 | 52 |
| 2) METHODES DU GRADIENT.                                                                         | 54 |
| A) Contrôle optimal.                                                                             | 54 |
| a) Recherche de l'algorithme.                                                                    | 54 |
| b) Convergence de la procédure.                                                                  | 58 |
| B) Identification de paramètres par des méthodes de gradient.                                    | 58 |
| a) Méthode de gradient pur.                                                                      | 58 |
| b) Autre méthode du gradient.                                                                    | 61 |



|                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3) METHODE DE LA QUASILINEARISATION.                                                                                   | 68 |
| A) Résolution de l'équation fondamentale de la programmation dynamique par approximation dans l'espace des politiques. | 69 |
| B) Résolution de systèmes différentiels par la quasilinearisation.                                                     | 72 |
| C) Résolution du problème d'identification par la quasilinearisation.                                                  | 74 |
| D) Algorithme d'identification.                                                                                        | 76 |
| E) Comparaison entre les méthodes de gradient et la quasilinearisation.                                                | 77 |
| a) Au niveau de la procédure.                                                                                          | 77 |
| b) Au niveau de l'algorithme.                                                                                          | 77 |
| c) Au niveau des domaines de convergence.                                                                              | 78 |

## PARTIE 5 : PRESENTATION DU PROGRAMME. 80

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| 1) ORGANISATION DU PROGRAMME.       | 80 |
| 2) ECRITURE DU PROGRAMME.           | 82 |
| 3) SOUS-PROGRAMMES D'ENTREE SORTIE. | 82 |
| A) Sous- programme DONNE.           | 82 |
| B) Sous- programme INTERP.          | 82 |
| 4) SOUS-PROGRAMMES DE CALCUL.       | 83 |
| A) Sous-programme VASY.             | 83 |
| B) Sous-programme CONV.             | 83 |
| C) Sous-programme DET.              | 83 |
| D) Sous-programme DIFF.             | 83 |



|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| 5) UTILISATION DU PROGRAMME.                                   | 84 |
| A) Définition du modèle.                                       | 84 |
| B) Cartes de contrôle.                                         | 84 |
| C) Cartes de données.                                          | 85 |
| PARTIE 6 : LES RESULTATS.                                      | 87 |
| 1) METHODOLOGIE.                                               | 87 |
| 2) LES MODELES ESSAYES.                                        | 89 |
| A) Modèle viscoélastique linéaire.                             | 89 |
| B) Modèles viscoélastiques non linéaires.                      | 91 |
| a) Rigidité de forme : $E = E_o + k \cdot x$                   | 91 |
| b) Rigidité exponentielle $E = E_o \cdot e^{k \cdot x}$        | 93 |
| C) Modèles faisant intervenir le vieillissement ou la fatigue. | 95 |
| 3) <u>CONCLUSION.</u>                                          | 97 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.                                   | 98 |
| ANNEXE A : LE PROGRAMME FORTRAN                                |    |
| ANNEXE B : PLANCHES.                                           |    |



## INTRODUCTION

---

Le courant actuel de l'emploi de l'ordinateur vise à le substituer de plus en plus à l'homme pour la prise des décisions mineures ou de routine. Pour que ceci soit possible, il faut pouvoir fournir à la machine la description des systèmes sur lesquels elle est censée devoir réagir. Cette description se fait au moyen de modèles représentatifs des systèmes. Aussi voit-on actuellement un mouvement des mathématiques appliquées vers l'étude des techniques de modélisation.

Si l'informatique a favorisé l'étude de la modélisation, il ne faut pas pour autant penser qu'elle en constitue un domaine réservé. En effet la modélisation est le processus de base de la pensée scientifique.

Le travail qui va être présenté a pour ambition d'essayer de faire le point sur ce domaine, actuellement en pleine effervescence, et de montrer, par une étude concrète comment on peut en mettre les résultats en oeuvre. La thèse qui en résulte, possède donc un aspect théorique et un aspect pratique.

Le but pratique correspond à un projet qui s'inscrit dans le cadre des activités du Centre d'Etudes de Vaujours du Commissariat à



l'Energie Atomique : il s'est agi de représenter par un modèle ( ou par une équation constitutive ) le comportement rhéologique d'un matériau élastoplastique.

Les buts théoriques sont multiples. Tout d'abord nous avons essayé de montrer comment l'étude abstraite de la modélisation pouvait dicter la méthodologie à suivre pour la recherche du modèle rhéologique. Ensuite une étude mathématique du problème de contrôle optimal, impliqué par cette recherche, a été faite dans le souci de situer, l'une par rapport à l'autre, les différentes approches que permettent les mathématiques actuelles : en particulier nous avons montré comment l'analyse dans les espaces fonctionnels et la programmation dynamique pouvaient être utilisées. Enfin, à la lumière des résultats théoriques obtenus, des algorithmes pratiques ont été dégagés afin d'aboutir à des programmes écrits pour l'ordinateur C D C 3600.

La thèse se compose alors des six parties suivantes :

1ère partie : présentation générale et formalisation de la théorie des modèles.

2ème partie : présentation du système physique dont on cherche une représentation rhéologique. Après avoir montré comment les résultats expérimentaux impliquaient une nature dynamique pour le modèle recherché, elle débouche sur un problème d'optimisation, qui se situe dans la classe des problèmes de contrôle optimal.

3ème partie : recherche d'une solution théorique au problème posé. La première voie empruntée, celle de l'analyse dans les espaces fonctionnels, qui consiste à regarder le problème comme un problème de minimum lié de fonctionnelle, permet de réaliser une extension de la théorie des multiplicateurs de Lagrange et de retrouver ainsi les conditions de minimalité du calcul des variations. La deuxième approche par la programmation dynamique, permet de retrouver ces conditions, en affectant un sens pratique aux fonctions mises en jeu.



4ème partie : recherche d'algorithmes permettant de résoudre le problème, les résultats théoriques de la 3ème partie n'étant pas, en général, pratiquement exploitables. Deux classes d'algorithmes sont présentées. Elles sont duales sur le plan des philosophies sous-jacentes, et de leurs performances pratiques : ce sont les méthodes de gradient et de quasilinearisation. Dans cette partie une méthode originale de gradient est présentée : elle se caractérise par une grande vitesse de convergence.

5ème partie : présentation du programme d'identification des modèles écrit pour l'ordinateur C D C 3600. Il est constitué du couplage d'une méthode de gradient et d'une méthode de quasilinearisation.

6ème partie : présentation des résultats. On y montre les résultats obtenus avec une suite de modèles différents. On voit dans quelle mesure l'hypothèse d'un modèle linéaire doit être rejetée. Par contre il apparaît qu'un modèle non linéaire faisant apparaître une rigidité, variant en fonction de sa déformation en raison inverse d'une exponentielle, peut fournir une bonne représentation et un outil satisfaisant de prévision pour l'évolution mécanique du matériau.

Le travail qui vient d'être résumé montre comment l'usage des mathématiques modernes et des moyens de l'informatique peut venir en aide à la résolution des problèmes de modélisation, auxquels se heurtent souvent les scientifiques. Dans un cadre plus restreint le prolongement de l'étude qui vient d'être faite devrait permettre de déboucher sur une résistance des matériaux élastoplastiques. Cependant il convient de noter que la démarche qu'on a essayé de suivre, pourrait être appliquée à la modélisation de n'importe quel système dynamique.

---



## PARTIE 1 : MODELISATION

### 1) GENERALITES : NOTIONS DE SYSTEME PHYSIQUE ET DE MODELE.

A) L'origine de ces notions.

B) La relativité des modèles - Domaine de validité.

### 2) NOTIONS D'ENTREES, DE VARIABLE D'ETAT, D'OPERATEUR D'EVOLUTION.

### 3) LES QUALITES D'UN MODELE.

A) Conditions de contrôlabilité et d'observabilité.

B) Mesure de la qualité d'un modèle.

### 4) CLASSIFICATION DES MODELES.

- - - - -



LA MODELISATION

1) GENERALITES : NOTIONS DE SYSTEME PHYSIQUE ET DE MODELE.A) L'origine de ces notions.

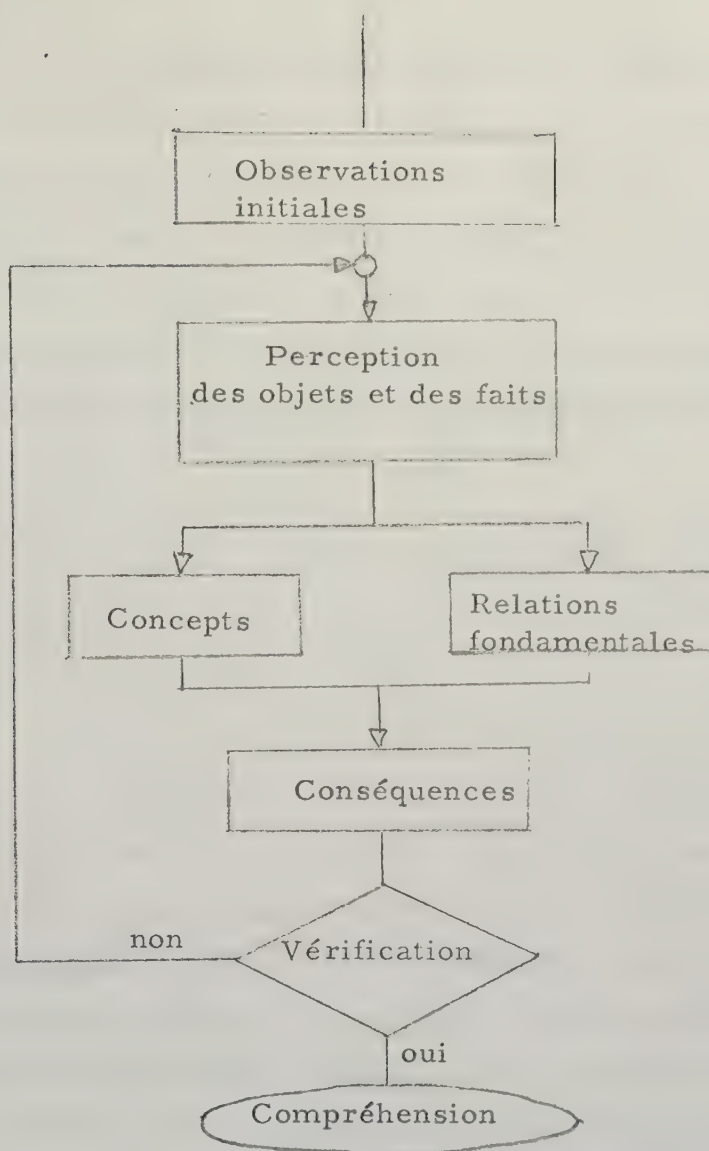
Une façon naturelle d'introduire ces notions est de montrer qu'elles sont à la base du mécanisme de la compréhension des phénomènes qui nous entourent. En effet, analysons les différentes phases de la réaction de l'esprit humain face à son environnement.

La première phase est la perception d'un ensemble considéré d'objets ou de faits. Pour cela on observe ces objets et ces faits et on leur associe des concepts abstraits, munis d'un certain nombre de qualités qui les définissent. La deuxième phase consiste à établir entre les propriétés de définitions des différents concepts un certain nombre de relations fondamentales : en physique, ce sont les principes, en mathématique, les axiomes. Enfin on déduit de ces relations des conséquences qui sont confrontées avec de nouvelles observations sur les objets et les faits : c'est la phase de vérification.

Si la vérification est possible, c'est-à-dire, si toute observation peut être associée à une déduction des relations fondamentales, au moyen du système de concepts de définition, on dit qu'on a compris l'ensemble d'objets étudiés. Sinon pour arriver à ce résultat on devra modifier les concepts représentant le système étudié, ou les relations entre les concepts, ou les deux à la fois. Cette procédure de la compréhension est un algorithme d'apprentissage. Il peut se représenter par le diagramme logique suivant :

.../...

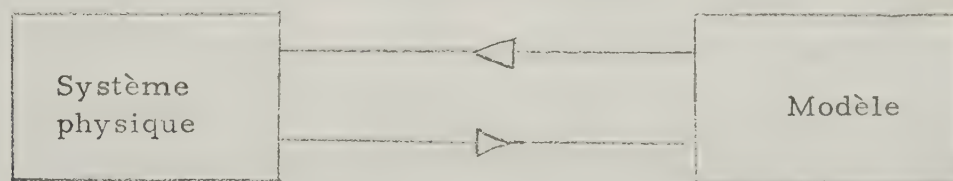




Lorsque, dans un tel processus, les conséquences prévues, c'est-à-dire déduites et vérifiées, sont nombreuses et importantes, elles constituent une science ou une théorie. L'exemple le plus ancien, qui peut être donné est certainement celui de la géométrie plane. Lorsque l'homme a été amené à parcelliser le sol, il a dû conceptualiser la notion de séparation par la définition de la ligne, de la droite et du point. Ensuite ont été établis une série d'axiomes, dont les conséquences sont toujours vérifiables sur le terrain par le géomètre, ce qui prouve que les concepts de base et les axiomes sont suffisants pour décrire et prévoir, c'est-à-dire pour comprendre les situations de la géométrie plane.



L'analyse qui vient d'être faite peut être aisément appliquée à tout processus de compréhension d'une chose. Elle met en évidence deux notions duales : l'ensemble des objets étudiés qui constitue le système physique, et l'ensemble concepts - relations fondamentales, qui constitue le modèle. La liaison système physique-modèle se fait par l'opération observation-conceptualisation, la liaison modèle-système physique se fait par la chaîne déduction (raisonnement de type mathématique) - expérience - observation.



Cependant, cette séparation du système physique de son modèle représentatif n'a été vraiment réalisée qu'assez récemment par les spécialistes de la physique mathématique. En effet avant l'apparition des théories physiques modernes, les scientifiques avaient tendance à identifier les systèmes physiques et les modèles, car ces modèles étaient assez simples. Mais les expériences telles que celles montrant la dualité corpusculaire et ondulatoire de la lumière, ont exigé la construction de modèles extrêmement abstraits (théorie quantique), qui mettaient en évidence le processus de modélisation qui vient d'être décrit.

#### B) La relativité des modèles - Domaine de validité.

Dès maintenant nous pouvons énoncer une propriété importante des modèles, qui résulte de la technique de modélisation : les modèles sont relatifs, ils possèdent un domaine de validité défini par l'ensemble des observations qu'on peut, ou seulement, qu'on désire faire sur le système physique. Et c'est à ce niveau, par la différence des buts poursuivis, que se distingue la modélisation du physicien mathématicien de celle de l'ingénieur



Le premier a pour ambition de trouver des modèles universels, c'est-à-dire capables de prévoir toutes les observations qu'il est possible de faire. Il a été conduit à représenter les particules élémentaires. Pour passer au macro-système réel qui intéresse l'ingénieur il suffirait normalement d'intégrer le modèle universel de la physique, ce qui est pratiquement impossible. Aussi le second construit-il des modèles au domaine de validité très limité, qui ne rendront compte que des aspects du système, l'intéressant ; dans l'étude d'un réacteur chimique, un chimiste pourrait n'être intéressé que par l'évolution des bilans matière et énergie ; son modèle se limitera à prévoir les observations que sont les mesures des flux énergie-matière. Par contre, aucune indication ne pourra être précisée quant à l'état des molécules élémentaires qui constituent pourtant le phénomène de base. On pourrait faire la même remarque pour le modèle de l'économiste qui se borne à prévoir les périodes d'inflation et l'expansion, tout en ignorant le devenir des particuliers.

Cette séparation des deux points de vue n'est pas totale. Ils sont même complémentaires. En effet l'élaboration des modèles de l'ingénieur résulte souvent de la schématisation de théories complexes. Par contre la découverte d'un modèle pour un système physique donné peut parfois, du fait de sa forme, influencer les théories sous-jacentes.

Ayant situé la notion de modèle, il est maintenant possible de la caractériser plus formellement.



## 2) NOTIONS D'ENTREES, DE VARIABLE D'ETAT, D'OPERATEUR D'EVOLUTION.

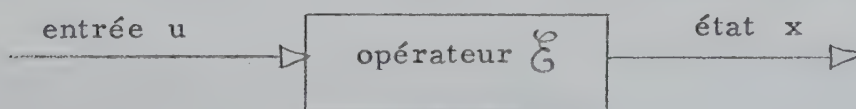
Les systèmes physiques que l'on cherche à schématiser au moyen des modèles, peuvent être considérés comme des ensembles d'objets ou d'individus qui, soumis aux actions de leur environnement, sont susceptibles de donner lieu à des changements de configuration, que l'on met en évidence au moyen des observations, les mesures. Le but est finalement d'établir la relation entre les actions extérieures et les configurations, qui permettra d'effectuer des prévisions.

Une observation définit, par ses modalités (type d'appareil de mesure, par exemple), une grandeur. Si toutes les grandeurs qui caractérisent le système sont simultanément mesurables, ce que nous admettons dans la suite, M. DESTOUCHES montre [7] que l'on peut définir une grandeur dont la valeur implique celle des autres. Cette grandeur est la grandeur d'état, elle représente la quantité maximum d'information que l'on peut connaître sur le système, et fournit une représentation de la configuration du système. Bien entendu cette variable d'état n'est pas absolue, elle dépend du domaine de validité du modèle.

Les actions extérieures sont supposées observables. Elles constituent les grandeurs d'entrées. On les appelle aussi contrôles ou commandes.

La relation qui lie les grandeurs d'entrées et la variable d'état, est l'opérateur d'évolution.

Le triplet grandeur d'état - grandeurs d'entrée - opérateur d'évolution doit donc constituer le squelette de tout modèle, et peut se représenter comme ci-dessous :





Ainsi le modèle de la mécanique classique du point possède

- comme variable d'entrée, les forces  $\vec{F}$
- comme variable d'état le vecteur  $\vec{M}$  : position - vitesse  $\in \mathbb{R}^6$
- comme opérateur d'évolution :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = m \vec{F} \text{ équivalent à } \vec{F} = m \vec{\gamma}$$

Voyons maintenant les conditions que doit remplir un modèle pour être viable.

### 3) LES QUALITES D'UN MODELE.

#### A) Conditions de contrôlabilité et d'observabilité.

Ces deux conditions sont des conditions sur l'opérateur d'évolution. Pour que le modèle soit utile, il faut que la relation entre  $u$  et  $x$  soit effective dans le domaine de validité du modèle. Ainsi toute variation élémentaire de la variable d'état ne pourra être obtenue que par une variation élémentaire non nulle des entrées. L'équation en  $\Delta u$  :

$$x_0 + \Delta x = \xi(u + \Delta u)$$

ne peut avoir toutes ses solutions nulles.

Cette condition exprime la contrôlabilité du modèle, c'est-à-dire la faculté de pouvoir faire évoluer ses états dans une direction voulue par le choix judicieux d'entrées  $u$ .

Inversement le modèle devra être observable c'est-à-dire que toute variation non nulle des entrées devra entraîner une variation non nulle des sorties.

Ces deux conditions se traduisent par des propriétés sur la forme de l'opérateur d'évolution  $\xi$ . Leur étude systématique n'a pu encore



être réalisée dans le cas général. Cependant on peut trouver des résultats intéressants dans [9], [11] et [1] concernant les modèles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, u)$$

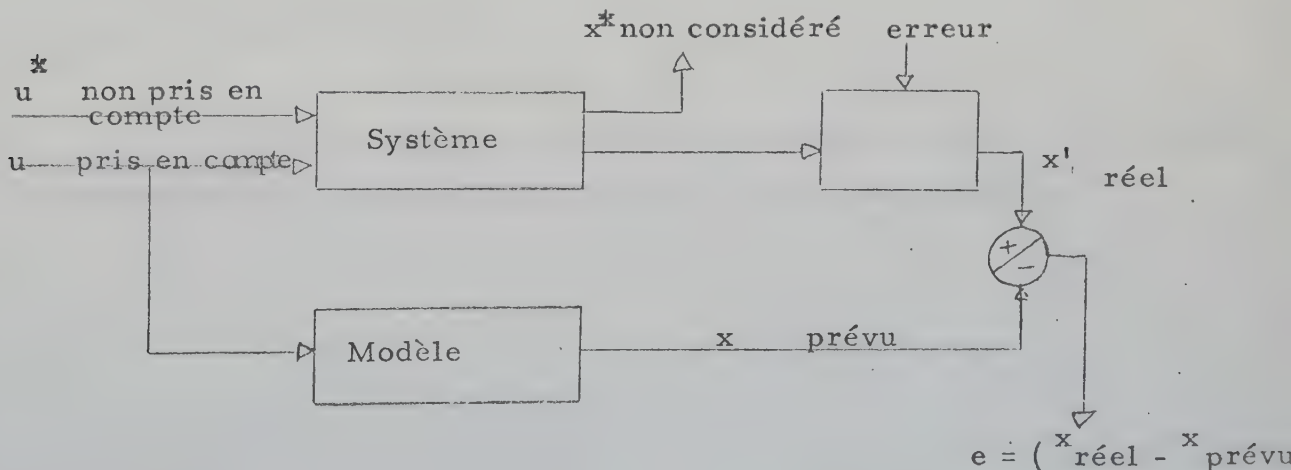
et particulièrement lorsque  $f$  est linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = A x + B u.$$

Ce qui vient d'être dit ne s'applique qu'au modèle et non au système physique. En effet l'observabilité et la contrôlabilité du système n'est envisageable qu'au niveau de la sélection des variables d'entrée et de sortie. Le problème sera donc de choisir, pour conceptualiser le système, un groupe de variables d'entrée et un groupe de variable de sortie, corréliées dans les deux sens.

#### B) Mesure de la qualité d'un modèle.

Ce choix est difficile, car le modèle que recherche l'ingénieur doit être un schéma simple qui ne prend en compte que les variables dominantes d'influence et de description du système. Aussi existera-t-il des écarts systématiques entre le modèle et le système réel. Ces écarts sont une mesure de la qualité du modèle et permettent donc de définir un indice de performance  $I(e)$





Cette appréciation I de la qualité d'un modèle doit naturellement tenir compte des erreurs de mesure dues à l'imperfection des appareils.

Nous venons de voir que la qualité d'un modèle peut s'évaluer, et qu'elle dépend essentiellement de la forme de l'opérateur d'évolution, et du choix des variables défini sur le système physique. Essayons maintenant d'effectuer une classification des modèles courants.

#### 4) CLASSIFICATION DES MODELES.

Une première classification peut être réalisée en fonction de la nature des variables d'état et d'entrée considérées. Elles peuvent être :

- des scalaires,
- des vecteurs (mécanique)
- des champs (électro-magnétisme, chaleur)
- des fonctions (densité de distribution )

Ces variables prennent leurs valeurs dans des espaces adéquats (axe des réels, espaces vectoriels, espaces fonctionnels ...). Leur spectre de valeurs peut alors être continu ou discret.

Une seconde classification des modèles est faite par la forme des opérateurs d'évolution. Parmi ceux-ci citons les principaux :



- Les modèles statiques.

L'opérateur d'évolution est une application injective de l'espace des entrées dans l'espace des états. Dans ces modèles le temps n'intervient pas directement.

- Les modèles dynamiques purs (ou Markoviens).

Ce sont les modèles pour lesquels les états futurs ne dépendent que de l'état initial et des entrées  $u(t)$ . On peut montrer que si les variables sont continues [5], les opérateurs d'évolution correspondant s'expriment par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, u).$$

En statistique, où les variables d'état sont des densités de probabilité, les modèles de ce type sont des chaînes de Markov.

- Les modèles non Markoviens qui prennent en compte l'histoire du système : les états futurs dépendent du passé et du présent. Ces modèles permettent la représentation des phénomènes de vieillissement (phénomène de fatigue en résistance des matériaux). Leur étude est généralement complexe. Cependant, dans certains cas, ils peuvent se ramener aux modèles Markoviens, par une extension de la variable d'état. Ainsi si un modèle s'exprime par :

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x, t, \int_{t_0}^t \varphi(x, u) dt, u\right)$$

il suffira de prendre comme variable d'état

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad x' = \int_{t_0}^t \varphi(x, u) dt \quad \begin{matrix} \text{(variable} \\ \text{d'âge)} \end{matrix}$$

Il devient alors :

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dx'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, t, x', u) \\ \varphi(x, u) \end{pmatrix} = F(X, t, u)$$

.../...



La même réduction existe dans les modèles statistiques par le recours aux statistiques suffisantes qui condensent en une variable l'histoire passée du modèle.

Il est certain que cette classification n'est pas exhaustive. Les familles de modèles, qui y figurent, sont celles, dont l'utilisation est aisée, et dans lesquelles, par conséquent, on puise le plus souvent lors d'une modélisation.

Dans toute la suite de ce travail nous ne nous intéresserons qu'aux modèles de type markovien, à variable d'état  $x$  continue, scalaire ou vectorielle, donc de la forme :

$$\frac{d x}{d t} = f(x, t, u)$$

Le but de ce travail est d'essayer de représenter par ce genre de modèle, le comportement rhéologique en traction pure d'un matériau agrégataire. Ce système physique sera précisément décrit dans la partie suivante.



PARTIE 2 : PRESENTATION DU SYSTEME PHYSIQUE  
A MODELISER

- 1) PRESENTATION GENERALE.
- 2) MODELE DE REPRESENTATION EXISTANT - SES FAIBLESSES.
- 3) DOMAINE DE VALIDITE DU MODELE CHERCHE.
- 4) NATURE DE L'INFORMATION EXPERIMENTALE.
- 5) TYPE DE MODELE A ENVISAGER.
- 6) HYPOTHESE DE MODELISATION : L'HYPOTHESE DE VISCOELASTICITE.
- 7) PROBLEME MATHEMATIQUE POSE.

- - - -



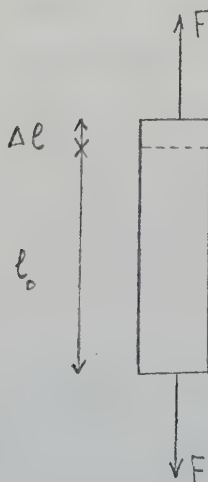
# PRESENTATION DU SYSTEME PHYSIQUE A MODELISER

## 1) PRESENTATION GENERALE.

Le système physique pour lequel nous nous proposons de rechercher un modèle représentatif, est un matériau agrégataire organoplastique, du type matière plastique dure : il s'agit d'une matière solide composée de cristaux organiques fins pris en masse dans un liant plastique.

Le domaine d'application du modèle recherché se limite au comportement mécanique. Nous voulons représenter l'évolution des déformations à faible vitesse d'un objet, fait de cette matière, lorsque celui-ci est soumis à des sollicitations extérieures.

Le présent travail constitue la première phase de cette recherche. Aussi nous introduirons des limitations supplémentaires au domaine de validité de notre modèle. En effet, dans la suite, il ne sera pris en considération que la sollicitation du type "traction pure". Ainsi nous réduirons notre système à une seule dimension, puisqu'il sera seulement question d'essayer de relier l'élongation d'une éprouvette parallélépipédique aux sollicitations suivant son axe principal.



Si ce travail est poursuivi dans le cas des contraintes de compression et de cisaillement, il sera possible de fondre les trois modèles élémentaires obtenus, en un seul qui, intégré à une géométrie quelconque, permettra de faire l'étude du comportement mécanique d'un objet dans le cas le plus général.

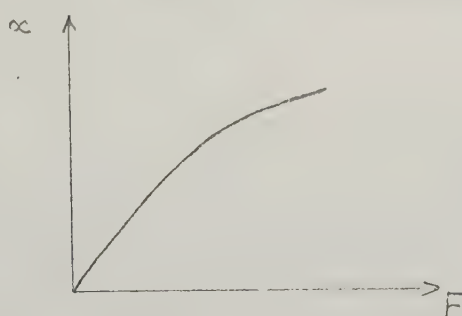
../..



Cette phase d'intégration relève des techniques de calcul de résistance des matériaux.

## 2) MODELE DE REPRESENTATION EXISTANT - SES FAIBLESSES.

A l'heure actuelle le calcul de la résistance des matériaux se fonde sur l'hypothèse communément admise de l'élasticité pure : les déformations des parcelles élémentaires sont reliées de façon bi-univoque aux sollicitations auxquelles elles sont soumises. Ici le modèle de la traction pure s'exprime par une fonction :



$$x = g(F)$$

$x$ : élongation

$F$ : force de traction.

Ce modèle statique est suffisant dans de larges domaines de sollicitation pour les matériaux de structure habituels : métaux, béton, etc...

Cependant la technologie moderne tend de plus en plus à utiliser des matériaux, simultanément, pour plusieurs fonctions. Ainsi un carburant solide aura non seulement sa fonction chimique première à exercer, mais il devra de plus assurer un rôle de structure dans l'ensemble où il est intégré. Alors on s'aperçoit vite que de tels matériaux, dont la composition est très différente de celle des matériaux de structure classiques, n'évolue pas suivant le modèle de l'élasticité pure dans le domaine de sollicitations, où l'on veut les employer.

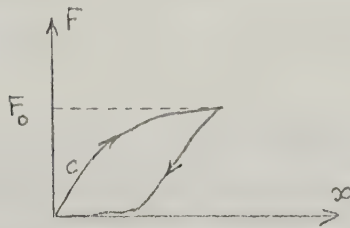
Voyons donc maintenant les écarts entre ce modèle et le comportement de notre matériau plastique:

../..



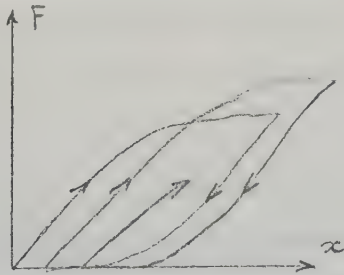
1) Si l'on soumet une éprouvette initialement au repos, à une contrainte de traction pure évoluant dans le temps suivant  $F(t)$ , on peut enregistrer les allongements  $x(t)$  et reconstruire par élimination du temps le diagramme  $\{x, F\}$ . Alors on s'aperçoit que la courbe obtenue varie avec la forme de la fonction  $F(t)$ .

2) Si l'on soumet une éprouvette à une sollicitation cyclique, par exemple si l'on effectue une montée de la contrainte  $F$  de 0 à  $F_0$  suffisamment grande, on peut mettre en évidence une dissipation d'énergie sous forme de chaleur. Le cycle du diagramme  $\{x, F\}$  permet d'en rendre compte :



$$\text{Energie dissipée} = \int_C F \cdot dx$$

3) Si l'on soumet une éprouvette à des cycles de sollicitations identiques et répétés, du type de ceux décrits en 2), on peut observer une évolution dans la forme et la position du diagramme  $\{x, F\}$ . En particulier l'éprouvette ne reprend plus sa forme initiale.



Après avoir fait cette présentation générale du système, il est maintenant possible de définir plus précisément le domaine de validité auquel nous limitons notre étude, la nature des informations, c'est-à-dire des expériences sur lesquelles se base notre recherche, le type de modèle qu'il nous faut envisager, et les problèmes mathématiques que posent l'ajustement du modèle.



### 3) DOMAINE DE VALIDITE DU MODELE CHERCHE.

Le modèle recherché ne représente que le comportement mécanique en traction pure. Aussi ne peut-il s'appliquer qu'à des solides élémentaires soumis à un champ de contraintes uniformes et positives.

L'évolution mécanique sera supposée isotherme : on admettra que les variations de température seront insuffisantes pour modifier de façon perceptible les caractéristiques du matériau. Ainsi la température ne devra pas être considérée comme variable d'entrée du système, mais plutôt comme paramètre.

Les déformations du solide seront toujours supposées lentes. Une déformation est dite lente lorsque à chaque instant, les déplacements de matière impliqués mettent en jeu des accélérations si faibles que les effets d'inertie sont négligeables par rapport à l'effort de sollicitation dont ils résultent. Cette restriction n'entame en rien la puissance d'utilisation du modèle pour l'étude du matériau dans la fonction de structure, puisque dans ce cas on suppose toujours les déformations lentes (fluage, relaxation, vibrations de faible fréquence).

Les fluctuations de la pression atmosphérique extérieure sont supposées assez faibles pour ne pas influencer le système, elles ne seront donc pas prises en compte par le modèle.

Les effets de poids propre sont négligés.

La région où s'amorce la rupture du matériau est exclue du domaine de validité du modèle cherché.



#### 4) NATURE DE L'INFORMATION EXPERIMENTALE.

On met en traction, au moyen d'une machine spécialisée, des éprouvettes parallélépipédiques de dimensions (1 x 3 x 10) cm. A chaque instant  $t$  on enregistre la force de traction  $F(t)$  et l'on mesure l'allongement de l'éprouvette  $\Delta l(t)$ . Celui-ci ne peut être évalué qu'en fonction d'un état référence de l'éprouvette : ce sera l'état libre à l'instant  $t_0$  de début des expériences, où l'éprouvette est supposée n'avoir pas vieilli et où elle est en équilibre dynamique soumise à une force de traction nulle.

Afin d'éliminer une variable dans le système, on préfère mesurer l'allongement relatif  $\Delta l/l_0 = \varepsilon$  au moyen d'une jauge de contrainte. Celle-ci est placée dans la partie centrale de l'éprouvette, c'est-à-dire dans une région où les contraintes sont uniformes, donc directement calculables à partir de la mesure globale de  $F(t)$  et de la connaissance de la section de l'éprouvette dans cette région :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

L'expérience montre que dans tous les cas de traction, aucun phénomène de striction n'est observé, si bien que,  $S$  demeurant constant dans le temps,  $F$  sera équivalent à la contrainte à un facteur d'échelle près.

#### 5) TYPE DE MODELE A ENVISAGER.

Dans le paragraphe 2 de cette partie, nous avons signalé trois écarts importants du comportement du matériau, avec les prévisions que fournit la théorie de l'élasticité pure.

La première remarque montrait que le matériau réagissait de manière différente en fonction du rythme de la sollicitation appliquée, ce qui laisse soupçonner un modèle de type dynamique.



La seconde mettait en évidence un frottement interne, qu'il faudra exprimer dans le modèle.

Enfin le troisième écart faisait apparaître un phénomène de fatigue, soit une évolution des caractéristiques du matériau en fonction de son histoire. On devrait alors s'attendre à un modèle de type dynamique non Markovien. Nous supposons cependant que nous pouvons nous ramener à un modèle markovien par extension de la variable d'état.

Nous pouvons donc admettre que le modèle s'écrit

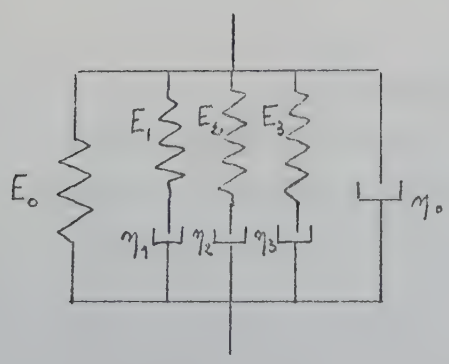
$$\frac{d x}{d t} = f (x, p, t, F)$$

La nature de la variable d'état  $x$ , et la forme de  $f$  seront définies en fonction d'hypothèses générales faites sur le système, tandis que  $p$  est un ensemble de paramètres caractérisant le matériau.

6) HYPOTHESE DE MODELISATION : L'HYPOTHESE DE VISCOELASTICITE

Elle consiste à admettre que le matériau est équivalent, du point de vue de son comportement mécanique, à un ensemble de ressorts et d'amortisseurs de type fluide assujettis les uns aux autres. Cette hypothèse à l'avantage d'inclure, ou de rejoindre, par des déplacements infiniment lents l'élasticité pure, et de rendre compte du frottement interne.

Un cas particulier est celui de la viscoélasticité linéaire  
On suppose qu'en plus le modèle est linéaire, c'est-à-dire :



Si à  $F_1(t) \longrightarrow x_1(t)$

Si à  $F_2(t) \longrightarrow x_2(t)$

alors :

$$\lambda F_1(t) + \mu F_2(t) \longrightarrow \lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$$



On peut montrer [24] que cette hypothèse implique que les caractéristiques des éléments constitutifs (rigidité  $E$  des ressorts et viscosité  $\eta$  des amortisseurs) ne dépendent pas de l'état du système.

De plus on peut montrer que tout édifice de ressorts et d'amortisseurs linéaires peut être rendu équivalent à un ensemble monté en parallèle d'un ressort, un amortisseur et un certain nombre de couples ressorts-amortisseurs en série : le modèle de Maxwell généralisé.

Ce type de modèle à l'avantage d'être caractérisé par une fonction de transfert, ou un spectre. Des méthodes d'analyse simples des signaux de sortie  $x(t)$  en fonction des signaux d'entrée  $F(t)$  permettent de les retrouver [6]. Cependant nous verrons que l'hypothèse de linéarité n'est valide pour notre matériau que dans un domaine des élongations peu étendu. D'où la nécessité de se tourner vers la viscoélasticité non linéaire, et d'analyser les problèmes posés par ce type de modèle.

## 7) PROBLEME MATHEMATIQUE POSE.

Pour un modèle viscoélastique donné on peut écrire l'équation différentielle qui régit son mouvement en fonction des paramètres  $E_i, \eta_i$  qui le définissent.

Ainsi l'évolution  $x(t)$  d'un modèle maxwellien vérifiera dans le cas général une équation différentielle de la forme :

$$f(x^{(n)}, \dots, x, F, \dots, F^{(m)}, t, E_i, \eta_i) = 0 \quad (1)$$

Si nous admettons ce modèle pour représenter le matériau, il nous reste à évaluer  $E_i$  et  $\eta_i$ . Si le modèle était parfait, ces valeurs seraient celles qui pour toutes expériences associant à la sollicitation  $F(t)$ ,



l'allongement  $z(t)$ , ferait correspondre par (1) une solution  $x(t) = z(t)$  pour  $x(t_0) = z(t_0)$ . Mais d'après la première partie nous savons que le modèle n'est qu'une schématisation du système physique, si bien qu'il est illusoire de retrouver  $x(t) = z(t)$ . Aussi sommes-nous amenés à définir la proximité du modèle et du système physique. Pour une expérience s'étendant sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_f]$ , nous choisissons le carré  $I$  de la norme de la différence des fonctions  $x(t)$  et  $z(t)$  définies sur  $[t_0, t_f]$ . Et les paramètres devront minimiser  $I$ .

La valeur du minimum de  $I$ , qui mesure l'écart entre le système et le modèle, définit un indice de performance du modèle et fournit une base pour la classification des modèles possibles.

D'où le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } E_i, \eta_i \text{ tel que } x(t) \text{ solution de} \\ f(x, x', \dots, x^{(n)}, F, \dots, F^{(m)}, E_i, \eta_i, t) = 0 \\ x(t_0) = z(t_0) \\ \text{minimise } I = \int_{t_0}^{t_f} (x - z)^2 dt \\ [t_0, t_f] \text{ intervalle de temps sur lequel se déroule} \\ \text{l'expérience.} \end{array} \right.$$

La forme de  $f$  est déduite du type de modèle choisi. Nous verrons dans les parties suivantes comment on l'obtient. Cependant une fois acquise, elle implique la nature vectorielle de la variable d'état  $X$  :

$$X = (x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n})$$

Les entrées constituent également un vecteur :

$$V = (F, \frac{dF}{dt}, \dots, \frac{d^m F}{dt^m})$$



Mais on peut noter que les mesures des  $X$  et  $V$  sont réalisables à partir de la seule connaissance des enregistrements  $x'(t)$  et  $F(t)$ .

Avec ces nouvelles notations, on peut écrire l'équation d'évolution sous la forme d'un système d'équations différentielles et le problème mathématique s'écrit :

Trouver  $E = \{E_i\}$  et  $\eta = \{\eta_i\}$  tels que  $X(t)$  solution de :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X, V, E, \eta, ) \\ X(t_0) = X_0 = Z_0 \end{cases}$$

minimise l'intégrale :

$$I = \int_{t_0}^{t_f} (x - z)^2 dt.$$

La méthode que nous allons adopter consistera à résoudre ce problème pour une expérience donnée ( $F(t)$  et le  $z(t)$  expérimental correspondant sont connus). Nous passerons à la phase de vérification, en comparant, pour un  $F'(t)$  donné, les résultats  $z'(t)$  pour une autre expérience, avec les prévisions  $x'(t)$  de l'élongation prévue par le modèle dimensionné par les  $E$  et  $\eta$  calculés dans la 1ère phase. La proximité de  $x'$  et  $z'$  jugera des qualités prévisionnelles du modèle.

Il apparaît donc que la difficulté centrale réside dans le moyen de résoudre ce problème.

Les inconnues  $E_i$  et  $\eta_i$  sont, soit des scalaires comme dans le cas des modèles viscoélastiques linéaires, soit des fonctions  $E_i(X)$  et



$\gamma_i(X)$  de l'état  $X$ . La forme de ces fonctions peut être supposée connue, seuls des paramètres  $p$  demeurant à déterminer, Nous sommes ramenés au premier cas, à la seule différence que la fonction  $f$  ne sera plus linéaire ; dans ce cas, où les inconnues sont des scalaires, le problème sera dit d'identification. Mais il se peut que  $E_i(X)$  et  $\gamma_i(X)$  soient des fonctions inconnues de l'allongement  $X$ . Alors ces fonctions peuvent être considérées comme fonction du temps :

$$\begin{pmatrix} E(X) \\ \gamma(X) \end{pmatrix} = U(X) = U(X(t)) = U(t)$$

Le problème de l'adaptation du modèle au système physique devient alors :

Trouver la fonction  $U(t)$  telle que la solution

$$\text{de } \begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X, U, t) \\ X(t_0) = Z_0 \end{cases}$$

minimise l'intégrale :

$$I = \int_{t_0}^{t_f} (x - z)^2 dt$$

Les fonctions  $U(t)$  représentent, développées dans le temps l'évolution des caractéristiques physiques du matériau qui est supposée continue. Aussi l'ensemble des fonctions  $U(t)$  sur lequel l'optimisation est réalisée, est-il l'ensemble des fonctions continues définies sur  $[t_0, t_f]$ . Après résolution, le retour aux fonctions  $E(x)$ ,  $\gamma(x)$  cherchées, s'effectue par élimination du temps entre  $X(t)$  et  $U(t)$

Ce problème inclut le problème de l'identification, car il suffit, pour le retrouver, de limiter le domaine d'optimisation à l'ensemble des fonctions constantes sur  $[t_0, t_f]$ .



Ce problème d'optimisation fonctionnelle se rattache au problème plus général du contrôle optimal, dont l'étude et la résolution théoriques font l'objet de la partie suivante.



PARTIE 3 : LE PROBLEME DU CONTROLE  
OPTIMAL.

- 1) PRESENTATION DU PROBLEME DU CONTROLE OPTIMAL.
- 2) CONTROLE OPTIMAL ET CALCUL DES VARIATIONS.
- 3) APPROCHE PAR L'ANALYSE FONCTIONNELLE DANS LES ESPACES ABSTRAITS.
  - A) Hypothèses préliminaires.
  - B) Transposition du problème du contrôle optimal en termes d'analyse dans les espaces abstraits.
  - C) Définitions des différentielles et des gradients en espaces fonctionnel.
  - D) Règle des multiplicateurs de Lagrange.
  - E) Calcul des gradients.
  - F) Utilisation de la règle des multiplicateurs.  
Formule d'Euler Lagrange.
- 4) APPROCHE PAR LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE.

- - - -



# LE PROBLEME DU CONTROLE OPTIMAL

La formalisation du problème posé par la recherche de notre modèle rhéologique, a conduit à un problème mathématique de même forme que ceux rencontrés dans la théorie du contrôle optimal.

## 1) PRESENTATION DU PROBLEME DU CONTROLE OPTIMAL.

La théorie du contrôle optimal constitue une branche récente des mathématiques appliquées. Elle tire son origine de l'utilisation pratique des modèles dynamiques en tant qu'outils prévisionnels.

Supposons que l'on ait un système physique évoluant suivant le modèle dynamique :

$$\frac{dX}{dt} = f ( X, U, t ) \quad (2)$$

$$\text{où : } X = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$U = (u_1(t), \dots, u_m(t))$$

Si  $U$  est fixé et si les conditions initiales sont connues :

$$X(t_0) = X_0 \quad (3)$$

les résultats connus de la théorie des systèmes d'équations différentielles [5] nous garantissent, moyennant des conditions de régularité vérifiées par  $f$  sur l'intervalle  $[t_0, T]$ , l'existence d'une trajectoire unique  $X(t)$  vérifiant (2) et (3).

On suppose que les entrées  $U$  du modèle sont modifiables et prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $E$ .  $U$  est appelé commande



du système. Sa modification entraîne des modifications de la trajectoire  $X(t) = X(t, U(t))$

Alors on peut désirer déterminer une commande  $U(t)$  qui ferait évoluer le système vers des conditions finales souhaitées. Ces conditions sont exprimées par un système de contraintes supposé non redondant :

$$\psi_j(T, X(T)) = 0 \quad j = 1, \dots, p; \quad p \leq n+1$$

$X(T)$  est l'état au temps final  $T$

Si ces conditions sont réalisables, la commande  $U(t)$  adéquate n'est pas en général unique. Aussi cherchera-t-on celle qui minimise une fonction de coût  $I$  définie en terme de la trajectoire  $X(t)$  et de la commande  $U(t)$ .

La forme générale du coût sera du type :

$$I = \int_0^T \varphi(X(t), U(t)) dt + \rho(X(T), T)$$

Au moyen d'une extension de la variable d'état analogue à celle envisagée au paragraphe 4 - partie 1, il est possible d'exprimer ce coût comme fonction de l'état et du temps final. C'est par cette même transformation que le problème de la modélisation posé en partie 2, peut être inclus dans la classe des problèmes de contrôle optimal dont la forme est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U(t) \text{ tel que la solution } X(t) \text{ de :} \\ \frac{dx}{dt} = f(X, U, t) \\ X(t_0) = X_0 \\ \text{minimise : } I = I(X(T), T) \end{array} \right.$$

où  $X(T)$  est l'état au temps final  $T$  déterminé par les conditions :

$$\psi_j(T, X(T)) = 0 \quad j = 1, \dots, p, \quad p \leq n+1$$



Ce problème se rencontre dans les études de guidage d'engins autopropulsés, ou de pilotage d'ensembles complexes. Par exemple dans la mise sur orbite fixée, d'une fusée, le modèle est la loi de la mécanique Newtonnienne,

$$F = m \gamma$$

la commande est la poussée du moteur de la fusée ; les conditions finales de satellisation sont des conditions sur la position et la vitesse de la fusée ; la fonction économique pourra être la consommation en carburant.

Dans l'exemple, que constitue la modélisation, on cherche à asservir le modèle admis par le choix des fonctions inconnues, de manière à ce que sa trajectoire colle le plus près possible à une trajectoire imposée par l'expérience. Le coût est l'écart en norme des deux trajectoires définies sur  $[t_0, T]$ .

## 2) CONTROLE OPTIMAL ET CALCUL DES VARIATIONS.

Le problème du contrôle optimal qui vient d'être présenté est en fait une forme particulière du problème général de la théorie du calcul des variations. On peut montrer [14] qu'il est inclus dans le problème connu habituellement, sous le nom de problème de Mayer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit la fonction vectorielle} \\ Y = (y_1(t), \dots, y_q(t)) \quad Y(t_0) = Y_0 \\ \text{supposée différentiable sur } [t_0, T] \\ \\ \text{Soit le système d'équations :} \\ \phi_i(t, Y, \frac{dY}{dt}) = 0 \quad i = 1, \dots, n ; n < q \quad (4) \\ \text{et l'ensemble des conditions finales} \\ \psi_j(T, Y(T)) = 0 \quad j = 1, \dots, p ; p \leq q + 1 \quad (5) \\ \\ \text{Trouver } Y \text{ solution de (4), vérifiant (5) et minimant} \\ I = I(T, Y(T)) \end{array} \right.$$



Or le calcul des variations est une branche très ancienne des mathématiques, puisque le premier problème dans ce domaine fut posé par GALILEE, c'était le problème de brachistochrones. Sa résolution fut effectuée plus tard et ce n'est qu'au 19<sup>ème</sup> siècle que la solution générale du problème de Mayer fut donnée. L'étude fut faite par les moyens de l'analyse classique. Et c'est précisément à ce niveau que l'on distingue la théorie du calcul des variations de celle du contrôle optimal. En effet son étude peut se fonder sur des branches récentes des mathématiques, telles que l'analyse dans les espaces abstraits, ou la programmation dynamique.

Dans les paragraphes suivants nous allons chercher la solution du problème du contrôle optimal par l'analyse dans les espaces abstraits. Car cette approche permet de voir que l'extension des espaces vectoriels normés aux espaces fonctionnels pré-Hilbertiens conserve la forme de la solution des problèmes d'extremum. En effet nous allons voir qu'il est possible de définir des gradients fonctionnels et de retrouver dans ces espaces les propriétés des multiplicateurs de Lagrange. De plus elle permet de déboucher sur un algorithme itératif, la méthode du gradient, qui pourra être mis sur ordinateur.

Nous ferons mention de l'approche par la programmation dynamique, car elle permet de donner un sens pratique aux multiplicateurs de Lagrange.



### 3) APPROCHE PAR L'ANALYSE FONCTIONNELLE DANS LES ESPACES ABSTRAITS.

#### A) Hypothèses préliminaires.

Afin de ne pas alourdir la présentation, nous allons énoncer un certain nombre d'hypothèses de régularité sur les fonctions définissant le problème (pour les problèmes qui seront réellement traités ces conditions seront réalisées) :

##### 1) L'opérateur d'évolution.

Les fonctions  $f_i$  du système différentiel :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U, t)$$

possèdent des dérivées partielles continues :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_i}{\partial u_{jk}}$$

dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  (ou un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ )

##### 2) Contraintes sur l'état final.

Elles possèdent des dérivées partielles continues par rapport à  $T$  et  $X(T)$  et la matrice :

$$\left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial T} ; \frac{\partial \Psi_j}{\partial X(T)} \right)$$

est de rang  $p$ .

##### 3) Le critère d'optimalité.

$I$  possède des dérivées partielles continues par rapport à  $T$  et à  $X(T)$



4) Les fonctions  $X(t)$  et  $U(t)$  sont définies sur  $(t_0, t_f)$  et appartiennent à des espaces fonctionnels pré Hilbertiens (espaces linéaires normés) respectivement  $\Gamma$  et  $\Omega$

B) Transposition du problème du contrôle optimal en termes d'analyse dans les espaces abstraits.

Rappels de définitions.

. Fonctionnelle : on appelle fonctionnelle toute application injective d'un espace fonctionnel linéaire normé dans un espace linéaire normé.

Ainsi l'opérateur d'évolution

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X, U, t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

défini une fonctionnelle  $\varphi$  de  $\Omega$  dans  $\Gamma$  :

$$X(t) = \varphi(U(t))$$

. Fonctionnelle réelle : c'est une application injective d'un espace fonctionnel dans  $\mathbb{R}$  (ensemble des nombres réels).

Ainsi les conditions terminales et le critère d'optimalité sont des fonctionnelles réelles. :

$$\psi_j(X(T), I) \longleftrightarrow \text{fonctionnelle réelle } g_j(U)$$

$$I = I(X(T), T) \longleftrightarrow \text{fonctionnelle réelle } I(U)$$

.../...



Le problème de contrôle optimal devient alors une recherche de minimum lié de fonctionnelles réelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad I(U) \\ \text{avec} \quad g_j(U) = 0 \quad j = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

Nous allons la réaliser à partir de la généralisation aux espaces abstraits, des concepts de différentielles de l'analyse classique. La présentation est inspirée des travaux de Hille, de Gateaux et de Fréchet [12], [13], [26].

C) Définitions des différentielles et des gradients en espace fonctionnel.

Soit un espace fonctionnel  $E$  et  $f$  une fonctionnelle réelle définie sur  $E' \subseteq E$ . Avant de définir la notion de différentielle, il faut, comme en analyse classique, préciser certaines notions telles que le voisinage d'un point  $u$  et la continuité de  $f$ .

Def.1.  $E'$  est ouvert en  $u \in E'$ , si pour tous  $h_1, \dots, h_n \in E$ , il existe un voisinage  $N$  de l'origine dans  $R^n$  :

$N = N(h_1, \dots, h_n)$  tel que ,  
pour tout  $(t_1, \dots, t_n) \in N$ , le point  $v = u + \sum_{i=1}^n t_i h_i$   
appartient en  $E'$ .

L'ensemble des  $v$  définit un voisinage  $E'_u$  de  $u$  par rapport à  $E'$ .

$E'$  est ouvert s'il est ouvert en tout  $u \in E'$ .

On peut remarquer que cette définition du "voisinage" est plus large que celle du voisinage en norme, car elle n'exige pas l'existence d'une norme.



Def 2. Si  $E'$  est ouvert en  $u$ ,  $f$  est continue en  
 $u$  si, pour tous  $h_1, \dots, h_n \in E$  et tout  $y \in E'_u$  la fonction définie  
dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$f\left(y + \sum_{i=1}^n t_i h_i\right)$$

est continue au voisinage de l'origine.

La fonctionnelle réelle  $f$  est continue sur  $E'$  si elle est  
continue en tout point  $u$  de  $E'$ .

Def 3. Soit  $f$  définie sur  $E'$  ouvert. On appelle différen-  
tielle de  $f$  en  $u$  et d'incrément  $h$ , la limite  $\delta f(u, h)$ , si elle existe  
pour tout  $h$ , de :

$$\delta f(u, h) = \lim_{t \rightarrow 0} (f(u + t h) - f(u)) / t ; t \in \mathbb{R}$$

#### Remarque 1

De la définition 3 il résulte :

$$\frac{d}{dt} f(u + t h) = \delta f(u, h)$$

#### Remarque 2

La différentielle  $\delta f(u, h)$  est homogène en  $h$ . En  
effet si  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$  et si l'on pose  $t' = \lambda t$

$$\begin{aligned} \delta f(u, \lambda h) &= \lim_{t \rightarrow 0} (f(u + t \lambda h) - f(u)) / t \\ &= \lambda \lim_{t' \rightarrow 0} (f(u + t' h) - f(u)) / t' \end{aligned}$$

#### Remarque 3

La différentielle  $\delta f(u, h)$  est linéaire en  $h$ , si  $f$   
est continue sur  $E'$ .

En effet soit la fonction  $F(t_1, t_2) = f(u + t_1 h_1 + t_2 h_2)$

où  $u, h_1, h_2 \in E'$

D'après l'hypothèse d'ouverture de  $E'$  on peut trou-  
ver  $|t_1|, |t_2|$  assez petits pour que :

$$u + t_1 h_1 + t_2 h_2 \in E'$$



D'après l'hypothèse de continuité on peut écrire :

$$F(t_1, t_2) = F(0, 0) + t_1 \left. \frac{\partial F}{\partial t_1} \right|_{0,0} + t_2 \left. \frac{\partial F}{\partial t_2} \right|_{0,0} + \varepsilon$$

D'après la remarque 1 :

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \delta f(u + t_1 h_1 + t_2 h_2, h_1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_2} = \delta f(u + t_1 h_1 + t_2 h_2, h_2)$$

D'où :

$$f(u + t_1 h_1 + t_2 h_2) - f(u) = t_1 \delta f(u, h_1) + t_2 \delta f(u, h_2) + \varepsilon$$

En faisant tendre  $t_1 = t_2 = t$  vers 0

$$\begin{aligned} \delta f(u, h_1 + h_2) &= \lim_{t \rightarrow 0} (f(u + t(h_1 + h_2)) - f(u)) / t \\ &= \delta f(u, h_1) + \delta f(u, h_2) \end{aligned}$$

L'ensemble des commandes  $u$  appartient à  $\Omega$  pré-Hilbertien, qui est muni du produit intérieur. Dans ces conditions on peut définir le gradient de  $f$ .

Def 4. Si  $f$  est une fonctionnelle définie sur  $E' \subseteq E$  pré-Hilbertien, on appelle gradient de  $f$  en  $u$  la fonction  $\nabla f(u)$ , si elle existe, telle que

$$\forall h \in E \Rightarrow \delta f(u, h) = \langle \nabla f(u), h \rangle$$

Def 5. On appelle minimum relatif sur  $E'$  de la fonctionnelle réelle  $f(\cdot)$  définie sur  $E'$  ouvert, le point  $u \in E'$  pour lequel il existe un voisinage  $E_u \subseteq E'$  tel que :

$$\forall y \in E_u \Rightarrow f(u) \leq f(y) \quad (5)$$

.../...



Def 6. On appelle minimum absolu de  $f(\cdot)$  sur  $E'$  le point  $u$  tel que :

$$\forall y \in E' \Rightarrow f(u) \leq f(y) \quad (6)$$

Dans le cas du minimum lié par des contraintes :

$$g_j(u) = 0$$

la relation de définition (5) est remplacée par

$$\forall y \in E'_u \cap C \Rightarrow f(u) \leq f(y)$$

où

$$C = \{ u \mid g_j(u) = 0 ; \forall j = 1, \dots, p \}$$

De même au lieu de (6) on écrira :

$$\forall y \in E' \cap C \Rightarrow f(u) \leq f(y)$$

Munis de ces définitions, nous pouvons développer la règle des multiplicateurs de Lagrange, qui est l'expression d'une condition nécessaire de minimum lié relatif pour le problème P :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{u \in \Omega} I(u) \\ \text{avec } g_j(u) = 0 \quad j = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

#### D) Règle des multiplicateurs de Lagrange.

Supposons que toutes les conditions d'existence des gradients sont vérifiées pour les fonctionnelles  $g_j$  et  $I$  impliquées dans le problème de minimum lié. En outre supposons que les gradients

$\nabla g_j$  et  $\nabla I$  existe dans le voisinage  $E'_u$  de tout point  $u$  et que le système de fonctions :

$$\nabla g_j ; \quad j = 1, \dots, p$$

est linéairement indépendant.

Dans ces conditions on peut définir en tout  $u$  le sous espace tangent  $T_u$  à l'ensemble  $C$  des commandes admissibles,



c'est-à-dire vérifiant les contraintes  $g_j(u) = 0$  :

$$T_u = \left\{ h \in \Omega \mid \langle \nabla g_j, h \rangle = 0, \forall j = 1, \dots, p \right\}$$

Alors on peut prouver le théorème suivant :

Th. 1 : Si  $u$  est un minimum relatif pour le problème (P) et si

$\nabla I(u) \neq 0$ , on a :

$$\forall h \in T_u \Rightarrow \langle \nabla I(u), h \rangle = 0$$

Démonstration. Le principe de la démonstration est d'effectuer dans le voisinage de  $u$ , un paramétrage des points vérifiant les contraintes  $g_j$ . On aura alors une forme analytique de  $g_j(u)$ , et il sera facile de voir les conséquences de minimum relatif en  $u$ .

Soit le scalaire  $s$  et le vecteur  $t$  de  $\mathbb{R}^p$  :

$$t = (t_1, \dots, t_p)$$

On peut déterminer le voisinage de  $y_{st}$  de  $u \in C$  :

$$y_{st} = u + s h + \sum_{j=1}^p t_j \cdot \nabla g_j(u)$$

où  $h$  appartient à  $T_u$ .

Définissons alors les fonctions des variables réelles

$t$  et  $s$  :

$$F_j(t, s) = g_j(y_{ts})$$

Montrons les quatre propriétés suivantes de ces fonctions

$F_j$  :

$$1) F_j(0, 0) = g_j(u) = 0 \text{ puisque } u \in C$$

2) Les dérivées partielles

$$F_{ji} = \frac{\partial F_j}{\partial t_i}$$

existent et sont continues au voisinage de  $(0, 0)$

.../...



D'après la définition des dérivées partielles :

$$F_{ji}(t, s) = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} [g_j(y_{ts} + \Delta t_i \nabla g_i(u)) - g_j(y_{ts})] / \Delta t_i$$

D'après la remarque 1 sur les différentielles fonctionnelles

$$F_{ji}(t, s) = \delta g_j(y_{ts}, \nabla g_i(u))$$

D'après l'existence de  $\nabla g_j$  :

$$F_{ji}(t, s) = \langle \nabla g_j(y_{ts}), \nabla g_i \rangle$$

La continuité des  $\nabla_g$  entraîne celle de  $F_{ji}$

De même on établit la continuité de

$$F_{js} = \delta F_j / \delta s$$

en montrant que :

$$F_{js} = \langle \nabla g_j(y_{ts}), h \rangle$$

$$3) F_{js}(0, 0) = 0$$

$$F_{js}(0, 0) = \langle \nabla g_j(u), h \rangle$$

Mais comme  $h \in T_u$ , ce produit intérieur est nul.

4) La matrice  $F_{ji}(t, s)$  est de rang  $p$  dans un voisinage de  $(0, 0)$ .

Nous avons établi que :

$$F_{ij}(0, 0) = \langle \nabla g_i(u), \nabla g_j(u) \rangle$$

L'hypothèse d'indépendance des  $\nabla g_j$  en  $u$  entraîne la régularité de  $F_{ij}(0, 0)$ . Par continuité elle garantit celle de  $F_{ij}(t, s)$  dans un voisinage de  $(0, 0)$ .



L'appartenance de  $y_{ts}$  à l'ensemble  $C$ , est liée aux conditions :

$$F_j(t_1, \dots, t_p, s) = 0 \quad j = 1, \dots, p \quad (7)$$

Elles forment un système de  $p$  équations de  $p + 1$  variables implicites. Les remarques (2) et (4) lui garantissent dans un voisinage de  $(0, 0)$  une solution unique paramétrée en  $s$  :

$$\begin{aligned} t_1 &= G_1(s) \\ &\dots\dots\dots \\ t_p &= G_p(s) \end{aligned}$$

En effet il suffit d'écrire que :

$$F_j(t_1, \dots, t_p, s) = \sum_{i=1}^p t_i F_{ji}(0, s) + F_j(0, s) + \varepsilon = 0$$

Les fonctions  $G_j$  sont continues et dérivables dans le voisinage de  $s = 0$

De plus  $G'_j = \frac{d}{ds} G_j(s) = 0$  pour  $s = 0$ . En effet :

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{d}{ds} G_j(s) \Big|_{s=0} F_{ji}(0, 0) = 0 \quad (7)$$

Les points  $y_{ts} \in C$  sont donc paramétrables en  $s$  ; dans un voisinage de  $s = 0$  :

$$y_{st} = y_s = u + s h + \sum_j G_j(s) \cdot \nabla g_j(u)$$

Alors pour  $|s|$  assez petit :

$$\begin{aligned} I(y_s) - I(u) &= I(u + s h + \sum_j G_j(s) \cdot \nabla g_j(u)) - I(u) \\ &= I(u + s [h + \sum_j (G'_j(0) + \varepsilon_j) \cdot \nabla g_j(u)]) - I(u) \\ &= s ( \delta I(u, h) + \sum_j G'_j(0) \cdot \delta I(u, \nabla g_j) ) + \varepsilon \\ &= s ( \langle \nabla I(u), h \rangle + \underbrace{\sum_j G'_j(0) \langle \nabla I(u), \nabla g_j \rangle}_{=0} ) + \varepsilon \\ &= s ( \langle \nabla I(u), h \rangle + \varepsilon ) \end{aligned}$$

.../...



Ayant supposé que  $u$  est un minimum relatif, il résulte qu'on doit avoir :

$$I(y_s) - I(u) \geq 0 \quad \forall s \text{ tel que } |s| < \varepsilon'$$

Ceci n'est possible que si :

$$\langle I(u), h \rangle = 0$$

De cette condition, on déduit la règle des multiplicateurs de Lagrange :

Th. 2 : Si toutes les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées et si  $\nabla I(u) \neq 0$ , il existe un ensemble unique de scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  non tous nuls et tels que :

$$\nabla I(u) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_j(u)$$

En effet soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  la solution de :

$$\sum_{j=1}^p \langle \nabla g_i(u), \nabla g_j(u) \rangle \lambda_j = \langle \nabla g_i(u), \nabla I(u) \rangle$$

La solution de ce système n'est pas nulle, car la matrice des  $\langle \nabla g_i, \nabla g_j \rangle$  est régulière, et il existe au moins un  $\langle \nabla g_i, \nabla I(u) \rangle \neq 0$  du fait que :

$$\langle \nabla I(u), h \rangle = 0 \text{ et } \nabla I(u) \neq 0 ; (h \in T_u)$$

En conséquence la fonction :

$$v = \nabla I(u) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_j(u)$$

$$\text{vérifie : } \langle \nabla g_j(u), v \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Donc  $v \in T_u$

$$\text{Mais : } \langle v, h \rangle = \langle \nabla I(u), h \rangle - \sum_{j=1}^p \lambda_j \langle \nabla g_j(u), h \rangle = 0$$

pour tout  $h \in T_u$  ; en particulier pour  $h = v$  :

$$\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$\Rightarrow \nabla I(u) = \sum \lambda_j \nabla g_j(u)$$

.../...



Le théorème 2 constitue la règle des multiplicateurs.

La condition nécessaire de minimalité qui vient d'être présentée est évidemment applicable au problème du contrôle optimal défini dans le paragraphe 1), puisque les hypothèses que nous avons précisées, satisfont celles du théorème 1. Mais pour pouvoir l'appliquer il nous manque une règle de calcul des gradients  $\nabla I$  et  $\nabla g_j$ .

### E) Calcul des gradients.

1) Fonctionnelle I. Elle est définie par :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X, U, t) & \begin{matrix} t \in [t_0, t] \\ X \in \mathbb{R}^n \end{matrix} \\ X(t_0) = X_0 \\ I = f(X(T), T) \end{cases}$$

Calculons d'abord  $\delta I(U, h)$

D'après la remarque 2 de la déf. de la différentielle (par. 4) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \delta I(U, h) &= \left. \frac{d}{ds} I(U + sh) \right|_{s=0} \\ &= \frac{\partial I}{\partial X(T)} \delta \varphi(U, h) \end{aligned}$$

où  $\varphi(U)$  est la fonctionnelle associant à U par le système différentiel la valeur finale  $X(T)$  de la trajectoire, T étant donné.

$$\delta \varphi(U, h) = \left. \frac{d}{ds} \varphi(U + sh) \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial X(T, s)}{\partial s} \right|_{s=0}$$

La fonction  $X(t, s)$  est la trajectoire définie par le système différentiel lorsque le contrôle vaut  $U + sh$ .



D'après les hypothèses faites sur  $f$ ,  $\frac{\partial X}{\partial s}$  existe comme solution de :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} V = \left( \partial f / \partial U \right) h + \left( \partial f / \partial X \right) V \\ V(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\left( \partial f / \partial U \right) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]$$

$$\left( \partial f / \partial X \right) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$$

Comme  $V = \frac{\partial X}{\partial s}$ , l'état initial imposé implique que :

$$V(t_0) = 0$$

Si  $I_x$  est une solution de :

$$\begin{cases} \frac{d I_x}{dt} = - \left( \partial f / \partial X \right)' I_x \\ I_x(\tau) = \partial \dot{I} / \partial X(\tau) \end{cases}$$

alors on peut vérifier que :

$$\frac{d}{dt} (I_x' V) = I_x' \left( \partial f / \partial U \right) h$$

ce qui s'écrit après intégration :

$$I_x'(\tau) \cdot V(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} I_x' \left( \partial f / \partial U \right) h dt + I_x'(t_0) \cdot V(t_0)$$

Mais  $V(\tau) = \delta \varphi(U, h)$  et  $V(t_0) = 0$

$$\begin{aligned} \delta \dot{I}(U, h) &= I_x'(\tau) \cdot V(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} I_x' \cdot \frac{\partial f}{\partial U} \cdot h dt \\ &= \langle \nabla I(u), h \rangle \end{aligned}$$

Par identification, il vient :

$$\nabla I(U) = I_x' \cdot \left( \partial f / \partial U \right)$$

2) Fonctionnelles  $g_j$ . Aux contraintes  $\psi_j$  correspondantes, on associe comme plus haut les fonctions adjointes  $\psi_{j^*}$  et il correspond les gradients :

$$\nabla g_j = \psi_{j^*} \cdot \frac{\partial f}{\partial U}$$



F) Utilisation de la règle des multiplicateurs. Formule d'Euler Lagrange.

La formulation de la règle des multiplicateurs peut être généralisée au cas où les  $\nabla g_j$  sont dépendants en écrivant :

Une condition nécessaire de minimalité en  $U$  est qu'il existe  $p + 1$  scalaires  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$  non tous nuls tels que :

$$\lambda_0 \nabla I(U) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_j(U) = 0 \quad ; \quad \lambda_0 = 0 \text{ ou } -1$$

Explicitant  $\nabla I(u)$  et les  $\nabla g_j(u)$   $j = 1, \dots, p$  il vient la condition nécessaire de minimalité pour le contrôle optimal  $U$  :

$$-\lambda_0 I'_x(\partial f / \partial U) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \psi'_{jx} \left( \frac{\partial f}{\partial U} \right)$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{d I_x}{dt} = - (\partial f / \partial x)' I_x \\ I_x(\tau) = \partial I / \partial x(\tau) \\ \frac{d \psi_{jx}}{dt} = - (\partial f / \partial x)' \psi_{jx} \\ \psi_{jx}(\tau) = \partial \psi_j / \partial x(\tau) \end{cases}$$

Si  $\ell_x(t)$  le vecteur dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\ell_x(t) = \lambda_0 I'_x(t) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \psi'_{jx}(t)$$

ces conditions peuvent s'écrire suivant la forme des relations de Lagrange :

Si  $U$  est un minimum, alors il existe  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\begin{cases} \frac{d \ell_x}{dt} = - (\partial f / \partial x)' \ell_x \\ \ell_x(\tau) = -\lambda_0 (\partial I / \partial x(\tau)) - \sum_{j=1}^p \lambda_j (\partial \psi_j / \partial x(\tau)) \\ \ell'_x (\partial f / \partial U) = 0 \end{cases}$$

.../..



L'approche de la résolution du problème du contrôle optimal, qui vient d'être faite par les moyens de l'analyse dans les espaces fonctionnels, est une extension de la résolution du problème de minimum lié classique. Aussi permet-elle de donner un sens mathématique aux résultats trouvés. Nous allons maintenant montrer que les mêmes résultats peuvent être retrouvés par une méthode utilisant la technique récente, qu'est la programmation dynamique. Elle a l'avantage de donner la signification pratique des composantes  $\ell_{x_1}(t), \dots, \ell_{x_n}(t)$  de  $\ell_x(t)$ .

#### 4) APPROCHE PAR LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE.

La programmation dynamique est une méthode d'optimisation des décisions, applicables aux modèles dynamiques de type Markovien, quelque soit le type de la variable d'état (discret, continu, aléatoire, déterministe).

Elle s'applique en effet à tous les problèmes vérifiant les hypothèses du théorème de Bellmann [3]. Cette classe est large; elle contient en particulier les problèmes d'optimisation des décisions sur des modèles Markoviens, qui vérifient le principe d'optimalité.:

"L'optimalité des décisions à prendre à la date  $t_0$ , ne dépend, ni des décisions passées, ni des états passés, mais seulement de l'état présent".

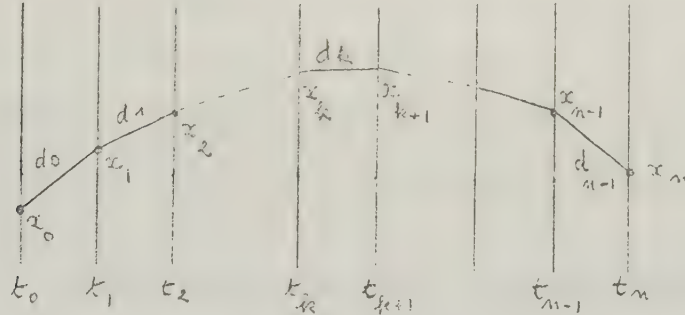
Illustrons ce principe, pour un problème à temps discrétisé :  $t = t_{-k}, \dots, t_0, \dots, t_k, \dots$

A chaque instant  $t_k$  la variable d'état prend une valeur  $x_k$  et nous formulons une décision  $d_k$  qui influence la valeur de l'état à la date  $t_{k+1}$  suivant la loi d'évolution :

$$x_{k+1} = f(x_k, d_k, t_k)$$



Si un tel processus dure du temps  $t_0$ , où le modèle est supposé à l'état  $x_0$ , au temps  $t_n$ , nous engendrons une suite de décisions  $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$  qu'on appelle une politique, et qui amène le modèle à l'état  $x_n$ , suivant une trajectoire représentable par le graphique :



A cet état final on associe le coût :

$I(x_n, t_n)$  qu'on désire minimiser sur l'ensemble des politiques.

On voit aisément que ce problème vérifie le principe énoncé plus haut. En effet la loi d'évolution montre qu'à l'époque  $t_k$  l'état futur  $(x_{k+1})$  du système ne dépend que de l'état  $x_k$  et de la décision  $d_k$ . Aussi l'optimalité de la politique pour le problème défini pour des conditions initiales  $(x_k, t_k)$  ne dépendra pas de la trajectoire suivie par le modèle aux dates  $t < t_k$ .

Soit  $\ell(x_k, t_k)$  la valeur optimale du critère correspondant à ce problème. Il découle alors que :

$$\ell(x_k, t_k) \leq \ell(x_{k+1}, t_{k+1})$$

pour  $(x_{k+1}, t_{k+1})$  résultat d'une décision  $d_k$  :

$$x_{k+1} = f(x_k, d_k, t_k)$$



La trajectoire optimale d'origine  $(x_k, t_k)$  passera par le point  $x_{k+1}$  résultant de la décision  $d_k$  telle que :

$$l(x_k, t_k) = \min_{\{d_k\}} l[f(x_k, d_k, t_k), t_{k+1}]$$

Cette relation est une équation fonctionnelle dont la résolution fournit  $l$ . Son calcul peut être effectué par itération en démar- rant des états terminaux possibles. La politique optimale se calcule en sens inverse à partir de la connaissance de  $x_0$  donc de  $l(x_0, t_0)$ .

Ce problème est en fait la forme discretisée du problème de contrôle optimal défini dans le paragraphe 2. En effet si  $\Delta t$  est le pas de la variable temps, l'opérateur d'évolution, c'est-à-dire l'équation différentielle qui, nous l'avons noté dans la partie 2, est l'opérateur caractéristique des modèles déterministes continus markovien, se met sous la forme des faibles accroisse- ments :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + f(X_k, t_k, U(t_k)) \cdot \Delta t \\ \Delta t &= t_{k+1} - t_k \end{aligned}$$

Le contrôle  $U(t_k)$  joue le rôle des décisions à chaque étape. Suivant la même démarche que plus haut on définit la fonction  $l(X, t)$  qui prend les valeurs du critère d'optimalité  $I(X(T), T)$  pour le problème de conditions initiales :

$$t_0 = t ; X_0 = X$$

Pour une variation élémentaire  $(dX, dt)$  des conditions initiales  $(X, t)$ , on peut écrire aussi :

$$l(X, t) = \min_{U(t)} l(X + dX, t + dt)$$



Mais admettant pour  $f$  et  $l$  les conditions de continuité et de dérivabilité nécessaires, on a :

$$l(x+dx, t+dt) = l(x) + \frac{\partial l}{\partial x} \cdot f(x, u, t) \cdot dt + \frac{\partial l}{\partial t} dt$$

D'où

$$l(x, t) = \min_u \left[ l(x) + \frac{\partial l}{\partial x} \cdot f dt + \frac{\partial l}{\partial t} dt \right]$$

$$\Rightarrow \min_u \left( \frac{\partial l}{\partial x} f(x, u, t) + \frac{\partial l}{\partial t} \right) = 0$$

ou ;

$$\min_u \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial l}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial l}{\partial t} \right) = 0 \quad (9)$$

C'est l'équation fondamentale de la programmation dynamique appliquée au contrôle optimal.

Posons :

$$l_{x_i} = \frac{\partial l}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad l_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 l}{\partial x_i \partial x_j}$$

Si  $u$  est le contrôle optimal, elle est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^n l_{x_i} f_i + \frac{\partial l}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{x_i} \frac{\partial f_i}{\partial u} = 0 \quad (10)'$$

On peut alors écrire :

$$\frac{d l_{x_i}}{dt} = \sum_{j=1}^n l_{x_i x_j} \frac{dx_j}{dt} + l_{x_i t} \quad (11)$$



Dérivant (10) et combinant avec (11) il vient :

$$\sum_{i=1}^n l_{x_i x_j} \dot{x}_i + l_{x_j t} + \sum_{i=1}^n l_{x_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d l_{x_j}}{dt} = - \sum_{i=1}^n l_{x_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \quad (13)$$

(10)' et (13) sont les 2 équations (8) et (6) d'Euler Lagrange. La troisième équation s'obtient aisément en écrivant la condition terminale :

$\ell(X, t) = I(X, t)$  pour l'ensemble des points vérifiant les contraintes;

$$\psi_j = \psi_j(x, t) = 0 \quad j = 1, \dots, p$$

Nous voyons donc que les fonctions  $\ell_{x_i}(t)$  de Lagrange ont la signification d'un coût marginal. Elles permettent d'apprécier le coût d'une fluctuation  $\delta X(t)$  autour de la trajectoire optimale.

### CONCLUSION :

Les conditions de Lagrange, que doit vérifier la solution  $U$  du problème de contrôle optimal, et que nous avons présentées par une approche abstraite et une approche plus pratique, ne sont que des conditions nécessaires de minimalité.

Aussi la condition supplémentaire dite de Jacobi doit être ajoutée, c'est une condition du second ordre, analogue à une condition de concavité, qui garantit la qualité de l'extrémum auquel on a affaire.

Généralement on ne considère que les conditions de Lagrange, car on se trouve dans le cas où le problème n'admet pas



pas de maximum. Ceci se produit précisément dans le problème posé par notre recherche d'un modèle rhéologique. Malheureusement les équations d'Euler Lagrange sont d'un emploi pratique difficile et elle sont la plupart du temps, insolubles. Aussi doit-on avoir recours à des méthodes itératives et approximatives du calcul numérique. Elles conduisent à la mise à point d'algorithmes qui font l'objet de la partie suivante.



## PARTIE 4 : ALGORITHMES.

### 1) INTRODUCTION.

### 2) METHODES DU GRADIENT.

#### A) Contrôle optimal.

a) Recherche de l'algorithme.

b) Convergence de la procédure.

#### B) Identification de paramètres par des méthodes de gradient.

a) Méthode de gradient pur.

b) Autre méthode du gradient.

### 3) METHODE DE LA QUASILINEARISATION.

A) Résolution de l'équation fondamentale de la programmation dynamique par approximation dans l'espace des politiques.

B) Résolution de systèmes différentiels par la quasilinearisation.

C) Résolution du problème d'identification par la quasilinearisation.

D) Algorithme d'identification.

E) Comparaison entre les méthodes de gradient et de quasilinearisation.



ALGORITHMES

1) INTRODUCTION.

Rappelons précisément la nature du problème mathématique qui a été introduit, dans la partie 2., par la recherche d'un modèle rhéologique pour notre matériau agrégataire plastique.

Le problème peut prendre deux formes équivalentes en fonction de la nature mathématique du critère d'optimalité I.

## \* Forme 1. - Critère intégral.

Trouver : U tel que la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, U, t, F(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, U, t, F(t)) \\ x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

rendre minimale l'intégrale :

$$I = \int_{t_0}^{t_f} (x_1 - z(t))^2 \cdot dt$$

$z(t)$  est une fonction connue dont la valeur est la mesure à l'instant  $t$  de l'élongation d'une éprouvette sollicitée, au cours d'une expérience de traction pure, par la force  $F(t)$ .

## \* Forme 2. - Critère final

Trouver : U tel que la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, U, t, F(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, U, t, F(t)) \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} = (x_1 - z(t))^2 \\ x_i(t_0) = x_{i0} \quad i = 1, \dots, n ; x_{n+1}(t_0) = 0 \end{array} \right.$$

rendre minimum :  $I = x_{n+1}(t_f)$



Une écriture matricielle peut être donnée à ces deux formes en posant  $X = (x_1, \dots, x_n)$  pour le 1er cas,  $X^* = (x_1, \dots, x_{n+1})$  pour le 2ème cas.

Le vecteur  $U$  à déterminer, peut être, soit un vecteur de  $m$  fonctions du temps, le problème est de contrôle optimal, soit un vecteur de  $m$  paramètres constants, le problème est d'identification.

Le principe des méthodes itératives consiste à remplacer un problème complexe, par une suite de problèmes simples, dont la résolution analytique est pratiquement réalisable et dont les solutions tendent vers celle du problème complexe. Les méthodes que nous allons présenter forment deux classes duales.

Le problème à résoudre, se présente, dans l'une ou l'autre forme, comme un problème de lissage d'une fonction  $z(t)$  par la composante  $x_1(t)$  de la solution d'un système différentiel paramétré. La fonction lissée recherchée  $x_1(t)$  doit donc satisfaire les contraintes suivantes :

- 1) Vérifier le système différentiel.
- 2) Rendre minimum le critère des moindres carrés.

Les méthodes itératives de la première classe, les méthodes dites "du gradient", consistent à engendrer une suite de fonctions  $(X^n(t))$  vérifiant toujours la première condition, et assurant une décroissance monotone de la valeur de  $I$  jusqu'à son minimum.

La deuxième classe comprend la méthode de quasilinearisation. Celle que nous présentons ne s'applique qu'au problème d'identification. La suite de fonctions engendrées est une suite de solutions optimales de problèmes possédant le critère  $I$ , mais dont les systèmes différentiels possèdent une solution qui tend vers une solution du système initial.



Ces deux types de méthodes, duales dans leur conception, se complètent pratiquement puisque les méthodes du gradient possèdent un large domaine de convergence, mais deviennent instables au voisinage de la solution optimale, tandis que la méthode de quasilinearisation possède un domaine de convergence plus restreint et converge quadratiquement au voisinage de la solution optimale. On aura donc avantage à coupler ces deux méthodes dans le programme d'ordinateur qui les mettra en oeuvre.

## 2) METHODES DU GRADIENT.

### A) Contrôle optimal.

#### a) Recherche de l'algorithme.

Soit  $U(t)$  un contrôle donné supposé non optimal. Il lui correspond une fonction  $X(t)$  et une valeur  $I$  du critère d'optimalité.

Nous cherchons à modifier  $U(t)$  en  $U(t) + \delta U(t)$  de manière à ce que la variation de  $X(t)$  :

$$X(t) \longrightarrow X(t) + \delta X(t)$$

implique une décroissance de la valeur du critère :

$$\dot{I} \longrightarrow I + \delta \dot{I} \quad ; \quad \delta I < 0$$

Compte tenu des hypothèses faites sur la continuité et la dérivabilité des équations du système différentiel nous pouvons écrire que

$\delta U$  et  $\delta X$  sont liés par :

$$\frac{d}{dt} \delta X = \frac{\partial f}{\partial x} \delta X + \frac{\partial f}{\partial U} \delta U$$

Si l'on prend le problème dans sa forme 1,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est la matrice carrée :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad i = 1, \dots, n \quad ; \quad j = 1, \dots, n$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial U} \right)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \quad i = 1, \dots, n \quad ; \quad j = 1, \dots, m$$



De plus on impose des conditions initiales  $X(t_0)$ , ce qui implique :

$$\delta X(t_0) = 0$$

$$\delta I \text{ s'écrit : } \delta I = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x_1 - \beta) \delta x_1 dt$$

Nous nous posons maintenant le problème de trouver la direction  $\delta U$  dans laquelle la variation  $\delta I$  est la plus négative, ce qui revient à chercher une ligne de plus grande pente pour  $I(u)$ .

Imposons la norme  $\alpha$  pour  $\delta U(t)$ . D'où le problème écrit avec un critère terminal :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \delta U(t) = (\delta u_1, \dots, \delta u_m) \text{ tel que :} \\ \int_{t_0}^{t_f} \delta U(t)^2 dt = \alpha^2 \quad (\text{contrainte } g(u) = 0) \\ \text{et tel que la solution de :} \\ \frac{d}{dt} \delta X^* = A \delta X^* + B \delta U ; \delta X^*(t_0) = 0 \\ \text{minimise } \delta I = \delta I_{n+1}(t_f) = (\delta X^*(t_f))_{n+1} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} [A]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad i, j = 1, \dots, n \\ \quad = \mathcal{L}(x_1 - \beta); i = n+1; j = 1 \\ \quad = 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} [B]_{ip} = \frac{\partial f_i}{\partial u_p} \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \quad = c \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

Les résultats de la partie précédente nous donnent une solution analytique à ce problème.

$$\begin{aligned} & \cdot \text{ Calcul de } \nabla g \\ \langle \nabla g, h \rangle &= \frac{d}{ds} \left( \int_{t_0}^{t_f} [(\delta U(t) + s h)^2 - \alpha^2] dt \right) \Big|_{s=0} \\ \Rightarrow \nabla g &= 2 \delta U(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \text{ Calcul de } \nabla \delta I \\ \nabla \delta I &= \delta I_x \cdot B \quad \text{où } \delta I_x \text{ est solution de :} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \delta I_x = -A' \delta I_x \\ I_x(t_f) = \frac{\partial \delta I}{\partial X^*} = (0, 0, \dots, 0, 1) \end{array} \right.$$

.../...



L'examen de ce système montre que :

$$(\delta I_x)_i = 0 \quad \text{si } i = 2, \dots, n \quad \text{et} \quad (\delta I_x)_{n+1} = 1$$

$(\delta \dot{I}_x)_1$  est alors solution de :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\delta \dot{I}_x)_1 = -a_{11} (\delta I_x)_1 - 2(x_1 - z) \\ (\delta I_x)_1(t_f) = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\nabla \delta I(\delta U) = \delta I_x' \cdot B$$

$$\text{ou : } (\nabla \delta \dot{I}(\delta U))_p = (\delta I_x)_1 \cdot b_{1p} ; p = 1, \dots, m$$

Nous remarquons que  $\nabla \dot{I} \Big|_U = \nabla \delta \dot{I}$  ne dépend pas de  $\delta U$

. Conditions de Lagrange :

Il existe  $\lambda$  tel que :

$$\lambda \cdot \nabla \delta \dot{I} = \nabla g = 2 \delta U(t)$$

ou :

$$\delta u_p(t) = \frac{1}{2} \lambda (\delta I_x)_1 \cdot b_{1p}$$

. Valeur de  $\lambda$ . On déduit de la condition de normalisation imposée à  $\delta U(t)$  :

$$\frac{1}{4} \lambda^2 \|\nabla \dot{I}\|^2 = \alpha^2 \implies \lambda = \frac{2 \varepsilon \alpha}{\|\nabla \dot{I}\|} \quad \varepsilon = \pm 1$$

Il faut de plus que  $\delta \dot{I}$  soit négatif :

$$\delta \dot{I} = \langle \nabla \dot{I}, \delta U \rangle = \int \frac{\varepsilon \alpha \nabla \dot{I} \cdot \nabla \dot{I}}{\|\nabla \dot{I}\|} = \varepsilon \alpha \|\nabla \dot{I}\| < 0$$

$\implies \varepsilon = -1$

. Choix de  $\alpha$

$\delta \dot{I}$  étant la variation au premier ordre du critère  $I$  lorsque :

$$U \longrightarrow U + \delta U$$

il est possible de trouver  $\alpha$  assez petit tel que

$$I(U + \delta U) < I(U)$$

Le critère des moindres carrés  $I$  admet 0 comme borne inférieure. Aussi peut-on calculer  $\alpha$  tel que :

$$\delta \dot{I} = -\alpha \|\nabla \dot{I}\| = -\dot{I}(U)$$

.../...



Ensuite on calcule le  $\delta U$  correspondant. Si  $I(U + \delta U) < I(U)$  on accepte  $\alpha$ , sinon on divise  $\alpha$  par 2 et on recommence jusqu'à ce que la décroissance de  $I$  soit observée. On voit donc qu'il est possible de construire une suite de contrôle  $U^n$  dont la loi de récurrence :

$$U^{n+1} = U^n + \delta U^n$$

est donnée par l'algorithme suivant :

1/ - Initialiser par  $U^0, x(U^0), n = 0$

2/ - Intégrer à reculons de  $t_f$  à  $t_0$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\delta I_x)_1 = - \frac{\delta f}{\delta x} (\delta I_x)_1 - \varepsilon (x_1 - \bar{x}_1) \\ (\delta I_x)_1 \Big|_{t_f} = 0 \end{cases}$$

3/ - Dédire :

$$(\nabla I)_p = (\delta I_x)_1 \cdot \frac{\delta f_1}{\delta u_p} \quad ; p = 1, \dots, m$$

4/ - Estimer :

$$K = - \frac{I(U^n)}{\|\nabla I\|^2}$$

5/ - Calculer :

$$\delta U^n = K \cdot \nabla I$$

6/ - Intégrer :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, U^n + \delta U^n, t) \\ x(t_0) = (g(t_0), 0, \dots, 0) \end{cases}$$

7/ - Calculer :

$$I(U^n + \delta U^n)$$

Si  $I(U^n + \delta U^n) < I(U^n)$  incrémenter  $n$  et aller en 2/.

Sinon remplacer  $K$  par  $K/2$  et aller en 5.



## b) Convergence de la procédure.

Cette procédure fournit une suite de contrôles  $U^n$ , monotone par rapport à  $I$ . Montrons qu'elle converge vers le contrôle optimal.

La suite est monotone décroissante et elle est bornée inférieurement par 0. Elle possède donc une limite. A la limite on doit avoir :

$$U_{n+1} = U_n \Rightarrow \delta U = 0$$

$\delta U$  ne peut être nul, selon l'algorithme que si :

- ou bien  $I(U) = 0$
- ou bien  $\nabla I(U) = 0$

Dans ces deux cas  $U$  correspond à un minimum de  $I$ . L'algorithme converge donc.

Nous possédons maintenant un outil de modélisation. Mais il nous fournit les parties inconnues des opérateurs d'évolution sous une forme non analytique. Aussi à partir de maintenant l'accent sera mis sur les méthodes d'identification paramétrique pour des modèles sous forme analytique.

## B) Identification de paramètres par des méthodes de gradient.

Nous allons présenter une méthode de gradient pur, qui dérive de la technique exposée plus haut, et une méthode de gradient plus évoluée, qui est peut être originale, puisqu'elle n'a pas été rencontrée dans la littérature consultée.

### a) Méthode de gradient pur.

Nous procédons comme plus haut, mais en considérant que les contrôles admissibles doivent vérifier la contrainte :

$$\frac{dU}{dt} = 0$$



Nous cherchons dans  $\mathcal{R}^m$  un vecteur constant  $U = (u_1, \dots, u_m)$  de norme donnée, minimant la variation  $\delta \dot{I}$ , du critère I, pour une variation  $\delta U$  des paramètres.

Le vecteur  $\delta U$  n'étant qu'une fonction particulière de l'espace des contrôles, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \delta \dot{I} &= \langle \nabla I(U), \delta U \rangle \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{p=1}^m [(\delta I_x)_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \cdot \delta u_p] \cdot dt \end{aligned}$$

Mais les  $\delta u_p$  sont des constantes ; d'où :

$$\delta \dot{I} = \sum_{p=1}^m \delta u_p \int_{t_0}^{t_f} (\delta I_x)_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \cdot dt$$

Il faut maintenant choisir les  $\delta u_p$ , de telle sorte que  $\delta \dot{I}$  soit minimum et négatif, et sous la contrainte :

$$\sum_{p=1}^m \delta u_p^2 = \alpha^2$$

L'analyse fonctionnelle classique fournit, pour ce problème le résultat évident :

$$\delta u_p = K \cdot D_p$$

avec :

$$D_p = \int_{t_0}^{t_f} (\delta I_x)_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_p} dt$$

et :

$$K = - \frac{2\alpha}{(\sum D_p^2)^{1/2}}$$

Ce résultat est très voisin de celui du contrôle optimal, à la seule différence que les variations sur des contrôles sont remplacées par leurs moyennes.

L'identité des formulations et des approches conduit à l'identité de l'algorithme résultant. Nous allons cependant donner une variante pour le calcul des coefficients  $D_p$ . Elle aura l'avantage de simplifier leur calcul, qui, dans le cas présent, exige, pour l'estimation de  $I_x$ , une intégration à reculons.



Elle résulte d'une approche différente du problème d'identification. En effet, au lieu de se placer dans un espace fonctionnel

$\Omega = \{U\}$ , on peut considérer que le critère  $I$  n'est, en fait, qu'une fonction des  $m$  variables  $u_p$

$$\dot{I} = I(u_1, \dots, u_p)$$

Les conditions de continuité, admises sur l'équation différentielle, et existant sur  $I$ , permettent d'écrire :

$$\delta \dot{I} = \sum_{p=1}^m \frac{\partial \dot{I}}{\partial u_p} \cdot \delta u_p$$

Par identification avec :

$$\delta \dot{I} = \sum_{p=1}^m D_p \cdot \delta u_p$$

il vient

$$D_p = \frac{\partial \dot{I}}{\partial u_p}$$

Si l'on considère  $I$  écrit selon la forme 2 du problème d'identification, on a :

$$\frac{\partial \dot{I}}{\partial u_p} = \int_{t_0}^{t_f} e(x_1 - \hat{z}) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_p} dt$$

où  $\frac{\partial x_1}{\partial u_p}$  vérifient le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial u_p} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u_p} \right) - \left( \frac{\partial f}{\partial u_p} \right) \\ \frac{\partial x}{\partial u_p}(t_0) = 0 \end{cases}$$

Les conditions initiales sont nulles, car l'on fixe

$$x(t_0) = x_0$$

L'algorithme d'identification par la méthode du gradient s'écrit donc :

1/ Intégrer de  $t_0$  à  $t_f$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v_p = \frac{\partial f}{\partial x} v_p + \frac{\partial f}{\partial u_p} \\ v_p(t_0) = 0 \end{cases} \quad p = 1, \dots, m$$



2/ Calculer

$$D_p = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_{U_p} (x_1 - z) dt$$

3/ Calculer

$$K = - \frac{I(U^n)}{\sum D_p^2}$$

4/ Calculer

$$(\delta U^n)_p = K \cdot D_p$$

5/ Intégrer

$$\frac{dx}{dt} = f(x, U^n + \delta U^n, t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$

6/ Estimer

$$I(U^n + \delta U^n)$$

Si  $I(U^n + \delta U^n) < I(U^n)$  aller en (1)Sinon remplacer  $K$  par sa moitié et aller en (4)

Cet algorithme est, à peu de chose près, identique aux algorithmes classiques de recherche de minimum de fonction. Partant d'un point quelconque on chemine vers un minimum relatif, suivant une trajectoire qui est la ligne de plus grande pente joignant ces deux points.

Cette trajectoire n'est pas toujours la plus directe. C'est en particulier le cas lorsque la fonction  $I(u_1, \dots, u_m)$  n'est pas convexe. Dans notre cas,  $I$  ne l'est pas en général. Par contre si l'on considère  $I$  comme une fonctionnelle de  $X$ , nous remarquons que  $I$  est convexe par rapport à  $X$ . La méthode qui va suivre est inspirée de cette remarque.

#### b) Autre méthode du gradient.

Nous considérons le problème de l'identification sous sa forme 2. L'idée consiste à minimiser  $I(X)$  suivant une procédure voisine d'une procédure de gradient dans l'espace fonctionnel des états.

Le gradient  $\nabla_x \dot{I}$  vaut :

$$\nabla_x \dot{I} = \mathcal{L}(x_1 - z)$$



Une procédure de gradient du type de celle étudiée en a), pourrait être appliquée sur  $I$  supposée seule, c'est-à-dire non contrainte par les équations d'évolution. Les variations  $\delta X$  successives que l'on appliquerait sur la fonction  $X$ , seraient du type :

$$\delta X = k \cdot \nabla_x \dot{I}$$

Supposons que la fonction d'état  $X$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X, U, t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Ce système constitue une contrainte sur  $X(t)$  et définit l'ensemble des états admissibles  $\mathcal{X}(U) \in \Gamma$  paramétré en  $U$ .

Des variations  $\delta X$  peuvent être engendrées par des variations  $\delta U$  sur les paramètres. Elles sont solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{d(\delta X)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial X} \delta X + \frac{\partial f}{\partial U} \delta U \\ \delta X(t_0) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Malheureusement nous ne sommes pas toujours assurés de pouvoir trouver  $\delta U$  tel que l'accroissement  $\delta X$  résultant soit proportionnel à  $\nabla_x \dot{I}$  :

$$\delta X(\delta U) = k \cdot \nabla_x \dot{I}$$

Aussi afin de descendre sur  $I(X)$ , suivant la plus grande pente permise, est-on amené à rechercher l'accroissement des paramètres tel que,  $\delta X(\delta U)$  soit le plus proche possible de :

$$k \cdot \nabla_x \dot{I}$$

Si l'on remarque que les équations (14) qui définissent

$\delta X(\delta U)$  sont linéaires :

$$\delta X(k \delta U) = k \delta X(\delta U)$$

il est équivalent de rechercher  $\delta U_0$  tel que :

$$\delta X = \delta X(\delta U) \quad \text{pour} \quad \delta U = \delta U_0$$

soit le plus proche possible de  $\nabla_x \dot{I}$ .



Ensuite il suffira de choisir  $\delta U_0$  pour avoir la variation souhaitée  $\kappa \cdot \nabla I_x$

Il s'agit donc maintenant de résoudre le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta U \text{ tel que la solution } \delta x(t) \text{ de :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \delta x = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \delta U \\ \delta x(t_0) = 0 \end{array} \right. \quad (15) \\ \text{minimise :} \\ J = \| \delta x - \nabla_x I \|^2 \quad \text{soit ici} \\ J = \int_{t_0}^t [\delta x_1 - \mathcal{L}(x_1 - \mathcal{J})]^2 dt \end{array} \right.$$

Ce problème est facilement réglé si l'on remarque que la solution générale de (15) forme un espace linéaire  $T_u$  tangent à  $\mathcal{X}$  d'ordre au plus égal à  $m$ .

En effet la solution de l'équation homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \delta x = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x \\ \delta x(t_0) = 0 \end{array} \right.$$

est :

$$\delta x(t) = c e^{t_0} = 0$$

Le système (15) étant linéaire, sa solution s'écrit sous la forme :

$$\delta x(\delta U) = \sum_{p=1}^m \delta x^p \cdot \delta u_p$$

où les fonctions  $\delta x^p$  sont les solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \delta x = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot e_p \quad ; \quad p=1, \dots, m \\ \delta x(t_0) = 0 \end{array} \right.$$

$\{e_p\}$  étant la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ .

Dans ces conditions  $J$  s'écrit :

$$J = \int_{t_0}^t \left( \sum \delta u_p \cdot \delta x^p - \nabla_x I \right)^2 dt$$

On voit que  $J$  est un polynôme du second degré par rapport aux variables  $\delta u_p$ . Si l'on développe il vient :

$$J = \sum_{p,q=1}^m a_{pq} \cdot \delta u_p \cdot \delta u_q - 2 \sum_{p=1}^m b_p \cdot \delta u_p + c$$

avec

$$a_{pq} = \langle \delta x^p, \delta x^q \rangle \quad ; \quad b_p = \langle \delta x^p, \nabla_x I \rangle \quad ; \quad c = \|\nabla_x I\|^2$$

(16)
(17)



La matrice  $A = [a_{pq}]$  est une matrice carrée définie positive ou nulle.

Le polynôme  $J$  peut s'écrire matriciellement :

$$J = \delta U \cdot A \cdot \delta U - B \delta U + c$$

Une condition de minimalité est :

$$\frac{\partial J}{\partial (\delta u_p)} = 0 \quad \forall p = 1, \dots, m$$

soit :

$$\sum_{q=1}^m a_{pq} \delta u_q = b_p \quad \forall p = 1, \dots, m$$

D'où le système à résoudre :

$$A \cdot \delta U = B$$

- Supposons que  $A$  est régulière. Dans ces conditions  $A$  est définie strictement positive, si bien que  $J$  possède un extremum et un seul, qui de surcroît est un minimum. La solution  $\delta U^*$  du système est unique. Elle est l'expression du minimum.

$\delta U^*$  n'est nul que si  $B$  est nul.

- Supposons que  $A$  est singulière d'ordre  $r$ .

Cela signifie qu'il existe  $(m - r)$  relations de dépendance linéaire sur les fonctions  $\delta x^p$ , donc que l'ensemble des solutions  $\delta x$  du système différentiel (15) forme un espace linéaire de rang  $r$ .

Ces relations de dépendance sont vérifiées sur les éléments du vecteur  $B$  et les éléments des vecteurs colonnes. En effet chaque  $p^{i\text{ème}}$  composante résulte du produit intérieur d'une fonction avec la fonction  $\delta x^p$ . Il résulte que le rang de cet ensemble de vecteurs est égal à  $r$ . Le système (18) possède donc toujours une infinité de solutions. On peut alors annuler  $(m - r)$  composantes  $u_p$  de  $\delta U$  convenablement choisies. Le système devient de rang  $r$  et possède une solution unique :

$$\delta U^* = (\delta u_1^*, \dots, \delta u_r^*)$$

.../...



Ce cas correspond à une singularité sur  $\mathcal{H}(U)$  localisée en  $U$ , et du type arête, caractérisée par une dégénérescence de l'espace tangent.

Si maintenant on appelle  $A$  et  $B$ , la matrice et le vecteur calculés selon les formules (16) et (17), à partir des  $r$  fonctions indépendantes  $\delta X^{\dagger}$ , nous avons toujours une solution  $\delta U^*$  définie par :

$$\delta U^* = A^{-1} B$$

qui minimise  $J$ .

Comme l'on veut engendrer une suite de fonctions  $X^n$ , monotone par rapport au critère  $I(X)$  :

$$X^{n+1} = X(U^{n+1}) \text{ avec } U^{n+1} = U^n + k \cdot \delta U^*$$

il faut montrer qu'il existe toujours  $k$  tel que :

$$I[X(U + k \delta U^*)] \leq I[X(U)]$$

Si  $|k|$  est assez petit on peut écrire :

$$X(U + k \delta U^*) = X(U) + k \delta X^* + \varepsilon'$$

$$\delta X^* = \delta X(\delta U^*) \quad \text{et} \quad \varepsilon' \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad |k| \rightarrow 0$$

Sous la même condition :

$$I(X + k \delta X^* + \varepsilon') = I(X) + k \langle \nabla_x I, \delta X^* \rangle + \varepsilon$$

Etudions le signe de  $\alpha = \langle \nabla_x I, \delta X^* \rangle$

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{p=1}^m \delta u_p^* \cdot \langle \nabla_x I, \delta X^p \rangle \\ &= \sum_{p=1}^m \delta u_p^* \cdot b_p \\ &= \delta U^* \cdot B \end{aligned}$$

Mais  $\delta U^* = B A^{-1} \implies \alpha = B' A^{-1} B$

$A^{-1}$ , comme  $A$ , est strictement positive. Aussi :

$$\begin{aligned} \alpha &> 0 && \text{si } B \neq 0 \\ \alpha &= 0 && \text{si } B = 0 \end{aligned}$$

Si  $B \neq 0$  :

$$I(X + k \delta X^*) = I(X) + k \alpha + \varepsilon$$



On peut dans ce cas trouver  $k < 0$ ,  $k$  assez petit, pour obtenir une décroissance de  $I$ .

Le choix de  $k$  se fera suivant une procédure équivalente à celle présentée pour la méthode du gradient pur. La première estimation de  $k$  peut se faire en confondant  $\mathcal{X}$  et  $T_u$ .

On déduit alors :

$$k = -\frac{1}{2}$$

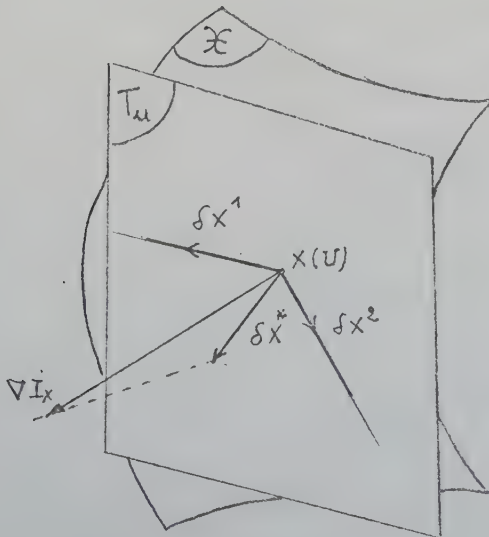
. Si  $B = 0$  ; on se trouve dans l'un ou l'autre des cas :

$$\begin{aligned} * \quad \nabla_x \dot{I} &= 0 \\ * * \quad \langle \nabla_x \dot{I}, \delta X^p \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Ces deux cas expriment des conditions nécessaires de minimalité sur  $I(X)$  contrainte par  $\mathcal{X}$ . La première définit un minimum sur  $I(x)$  seule, la seconde est la condition nécessaire de minimalité de Lagrange. La suite  $X^n$ , engendrée pour l'identification du modèle, est alors convergente

L'étude, qui vient d'être faite, permet de construire une suite de paramètres  $U^n$  convergeant vers leur valeur optimale. En effet la suite  $U^n$  est monotone décroissante par rapport à  $I$ , qui est inférieurement bornée par 0.

Voyons maintenant une interprétation géométrique de la construction de  $\delta X^*$ .



La recherche de  $\delta X^*$  appartenant à  $T_u$  et minimisant la norme de  $\nabla_x \dot{I} - \delta X^*$ , s'identifie avec la recherche du point de  $T_u$  le plus proche de l'extrémité de  $\nabla_x \dot{I}$ .

L'espace des états  $X$  étant supposé euclidien, un résultat de la géométrie euclidienne nous dit que  $\delta X^*$  est alors la projection



orthogonale  $\nabla_x \dot{I}$  sur  $T_u$ . Les  $\delta u_p^*$  sont les coordonnées de  $\delta X^*$  sur la base  $\{\delta x_p\}$  des fonctions génératrices de  $T_u$ .

Si pour l'état optimal du problème d'identification, le gradient  $\nabla I_{oc}$  n'est pas nul, alors  $\nabla_x \dot{I}$  est perpendiculaire à  $T_u$ . Aussi l'angle  $\theta$  entre  $\delta X^*$  et  $\nabla_x \dot{I}$  peut donner une idée de l'éloignement des paramètres  $U$  de leur valeur optimale. La procédure itérative de recherche pourra alors être interrompue dès que le  $\cos \theta$  sera suffisamment voisin de 0 :

$$\cos \theta = \frac{\|\delta X^*\|}{\|\nabla_x \dot{I}\|}$$

Nous pouvons donc formuler l'algorithme suivant :

1/ Poser  $n = 0$  et  $U_n$  arbitraire. Aller en 7

$$I(X^0) = \infty ; \quad \delta U^* = 0 ; \quad K = 0$$

2/ Calculer les fonctions  $\delta X^p(t)$  en intégrant les systèmes

$$\begin{cases} d \frac{\delta X^p}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta X^p + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u_p \\ \delta X^p(t_0) = 0 \end{cases} \quad p = 1, \dots, m$$

3/ Calculer la matrice  $A$  et le vecteur  $B$ ,

Si  $B = 0$  l'algorithme est terminé

Si  $A$  est singulière, réduire la dimension utile de  $U$

4/ Résoudre le système

$$A \delta U^* = B \quad \text{et évaluer} \quad \delta X^* = \sum \delta u_p^* \cdot \delta X^p$$

5/ Test de fin d'algorithme. Calculer

$$\cos \theta = \frac{\sum \delta u_p^* \cdot b_p}{I(X^n)}$$

Si  $\cos \theta \leq \varepsilon$  pré-fixé, l'algorithme est terminé

6/ Fixer :

$$K = -\frac{1}{2}$$

Augmenter  $n$  de 1



7/ Intégrer :

$$\begin{cases} \frac{dX^n}{dt} = f(X^n, U^{n-1} + k \delta U^*, t) \\ X^n(t_0) = X_0 \end{cases}$$

8/ Calculer  $I(X^n)$

Si  $I(X^n) > I(X^{n-1})$  remplacer  $k$  par  $k/2$   
et aller en 7.

Sinon poser :  $U^n = U^{n-1} + k \delta U^*$

Aller en 2

### 3) METHODE DE LA QUASILINEARISATION.

La quasilinearisation ne forme pas un domaine des mathématiques appliquées. Elle est plutôt, comme la programmation dynamique, une technique de calcul dont les domaines d'application sont très divers [4]:

- recherche des racines de systèmes d'équations .
- intégration des systèmes d'équations différentielles classiques ou M P B V (Multipoint Boundary Value).
- intégration des équations aux dérivées partielles .
- etc...

Son principe est d'associer à un problème  $P$  donné complexe, une suite de problèmes  $\{P^n\}$  plus simple à résoudre et dont la solution converge quadratiquement vers celle de  $P$ .

Voyons sur quelles bases se fonde la loi de récurrence qui permet d'engendrer  $\{P^n\}$ . Pour cela revenons à la programmation dynamique et montrons que la quasilinearisation peut s'introduire comme moyen de résolution de l'équation fondamentale.



A) Résolution de l'équation fondamentale de la programmation dynamique par approximation dans l'espace des politiques.

Rappel de cette équation. Nous considérons comme dans la section 3 (par. 4) un modèle à variable temps discrétisée  $t \in \{t_i \mid t_{i+1} = t_i + \Delta t\}$ . A chaque instant  $t_i$ , le système, à l'état  $x_i$ , soumis à une décision extérieure, évolue vers l'état  $x_{i+1}$  qu'il prend au temps  $t_{i+1}$ , selon la loi :

$$x_{i+1} = f(x_i, d_i, t_i)$$

Un coût  $c_i(t_i, x_i, d_i)$  est associé à chaque étape. On cherche la politique  $\{d_0, \dots, d_{n-1}\}$  à appliquer sur un système évoluant de  $t_0$  à  $t_n$ , d'état initial  $x_0$ , qui minimise le coût total :

$$J(x_0, t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i = J$$

Le même raisonnement que celui de la section 3 (par. 4) conduit à l'équation fonctionnelle qui définit la fonction  $J$ , supposée unique :

$$(19) \quad \begin{cases} J(x_i, t_i) = \min_{d_i} [c(x_i, d_i, t_i) + J(f(x_i, d_i, t_i), t_{i+1})] \\ \text{et } J(x_n, t_n) = 0; \forall (x_n, t_n) \end{cases}$$

La connaissance de  $(x_0, t_0)$  et de  $J$  permet de trouver une fonction  $d_i = d(x_i, t_i)$  qui donne la décision optimale à prendre à chaque instant, définissant ainsi la trajectoire optimale  $x(t)$ .

La résolution de l'équation fonctionnelle est souvent difficile et elle nécessite l'emploi de méthodes d'approximation itérative. A partir d'une fonction  $J^0(x, t)$  convenable, il est possible d'engendrer une suite  $\{J^N\}$  convergent vers  $J$  par une procédure du type :

$$J^N(x, t) = \max_d [c(x, d, t) + J^{N-1}(f(x, d, t), t)]$$

Cependant la résolution du problème réside dans la connaissance de la fonction politique ;

$$d_i = d(x_i, t_i)$$



Aussi peut-il être plus avantageux d'effectuer l'approximation sur  $d(x, t)$  et non sur  $\ell(x, t)$ .

Définissons donc une procédure d'approximation. Si l'on part d'une politique  $d^0(x, t)$ , une approximation de l'équation fonctionnelle, qui néglige la contrainte de minimisation, peut fournir une estimation  $\ell^0$  de  $\ell$  par résolution de :

$$(20) \quad \ell^0(x, t) = c(x, d^0, t) + \ell^0(f(x, d^0, t), t)$$

Ensuite nous cherchons à améliorer la fonction  $d^0$  en la remplaçant par  $d^1$  tel que  $d^1$  minimise :

$$c(x, d, t) + \ell^0(f(x, d, t), t)$$

Comme précédemment on pourra calculer la fonction  $\ell^1$  correspondant à  $d^1$ . En continuant ainsi de suite on engendre les suites :

$$\{d^N\} \quad \text{et} \quad \{\ell^N\}$$

Voyons dans quelle mesure le remplacement de  $d^0$  par  $d^1$ , et plus généralement celui de  $d^N$  par  $d^{N+1}$ , constitue une amélioration pour les estimations de  $\ell$  qui découlent. D'après la définition de la procédure :

$$\begin{aligned} \ell^N(x, t) &= c(x, d^N, t) + \ell^N(f(x, d^N, t), t) \\ &\geq \min_d [c(x, d, t) + \ell^N(f(x, d, t), t)] \\ &\geq c(x, d^{N+1}, t) + \ell^N(f(x, d^{N+1}, t), t) \end{aligned}$$

Mais

$$\ell^{N+1}(x, t) = c(x, d^{N+1}, t) + \ell^{N+1}(f(x, d^{N+1}, t), t)$$

Il vient alors en retranchant :

$$\ell^N - \ell^{N+1} \geq \ell^N(f(x, d^N, t), t) - \ell^{N+1}(f(x, d^{N+1}, t), t)$$

où :

$$(21) \quad \ell^N - \ell^{N+1} - [\ell^N(f) - \ell^{N+1}(f)] \geq 0$$

$\ell$  est une fonction de coût que l'on désire minimiser. Une amélioration de la politique de  $d^N$  devra rendre positif l'écart  $\ell^N - \ell^{N+1}$ . Une



condition nécessaire sera donc que l'opérateur défini par (21) soit positif. Rappelons qu'un opérateur  $\Omega$  est positif si :

$$\Omega(g) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g \geq 0$$

Ici :

$$\Omega(g) = g - g(f)$$

La positivité de  $\Omega$  dépend de  $f$ . Si elle est acquise, ce que nous admettons, la procédure définie plus haut engendre une suite  $\ell^N$  monotone décroissante.

Il est évident, à cause de la positivité de  $\Omega$  et par une raisonnement identique au précédent, que la solution de l'équation fondamentale est une borne inférieure de la suite  $\{\ell^N\}$ . Cette suite possède donc une limite  $\lambda$ . Montrons que  $\lambda$  est la solution cherchée, donc que la politique limite est optimale.

D'après la monotonie de  $\{\ell^N\}$  :

$$\ell^{N+1} \leq \min_d \{c + \ell^N(f)\} \leq \lambda + \varepsilon \quad \text{pour } N > N^*(\varepsilon)$$

A la limite on a :

$$\lambda = \min_d (c + \lambda(f))$$

ce qui montre que  $\lambda$  est la solution cherchée.

Une technique d'approximation vient d'être définie, moyennant la condition de positivité de  $\Omega$ . Le nom de quasilinearisation qui lui est attribué, provient du fait que l'équation (20) qui est résolue à chaque étape est le plus souvent linéaire. Pour résoudre numériquement les problèmes d'identification ou de contrôle optimal, il serait possible d'employer, à la lettre, la méthode qui vient d'être exposée puisque nous savons les mettre sous la forme de l'équation (19). Nous préférons utiliser la technique de quasilinearisation, comme moyen d'approcher la solution de systèmes différentiels.



## B) Résolution de systèmes différentiels par la quasilinearisation.

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(t_0) = c \end{cases}$$

supposé vérifiant toutes les conditions de régularité de la section 3.

Notre but est de remplacer ce système par des équations de la forme de l'équation fondamentale de la programmation dynamique.

Soit  $X = Y + H$  ; on peut écrire :

$$f(X) = f(Y+H) = f(Y) + H \frac{\partial f}{\partial Y}(Y) + \frac{1}{2} H \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} H + \varepsilon \cdot \|H\|^2$$

où :

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad H \rightarrow 0$$

La forme  $H \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(Y) \cdot H$  est en général positive. D'où :

$$f(X) \geq f(Y) + (X - Y) \nabla_x f$$

et :

$$f(X) = \max_Y (f(Y) + (X - Y) \nabla_x f)$$

Notre système différentiel s'écrit donc :

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \max_Y [f(Y) + (x - Y) \nabla_x f(Y)] \\ x(t_0) = c \end{cases}$$

En utilisant le même cheminement qu'au paragraphe précédent, on peut construire une suite d'approximations  $\{X^n\}$  de la fonction  $X$  ;  $Y$  joue le rôle de la fonction politique.

Si  $Y^0$  est une politique initiale, on résoud (23), démunie de la condition de maximum :

$$\begin{cases} \frac{dx^0}{dt} = f(Y^0) + (x^0 - Y^0) \nabla_x f(Y^0) \\ x^0(t) = c \end{cases}$$

Puis on "améliore"  $Y^0$  par le maximum  $Y^1$  en  $Y$  de :

$$f(Y) + (x^0 - Y) \nabla_x f(Y)$$

Le maximum est obtenu pour :

$$Y = Y^1 = X^0$$

.../...



D'où la procédure générale :

Engendrer à partir de  $X^0$  la suite de fonction  $\{X^n\}$  par la récurrence :

$$\begin{cases} \frac{dX^N}{dt} = f(X^{N-1}) + (X^N - X^{N-1}) \nabla_x f(X^{N-1}) \\ X^N(t_0) = c \end{cases}$$

On remarque que l'équation à intégrer à chaque étape est linéaire.

Comme plus haut on peut montrer que la monotonie et la convergence de la suite  $\{X^N\}$  est garantie par la condition que l'opérateur :

$$\Omega = \frac{d}{dt} - \nabla_x f(x).$$

soit positif.

Montrons que la convergence de la suite  $\{X^N\}$  est quadratique.

Soit  $X$  la solution de (22). Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (X - X^N) &= f(X) - f(X^{N-1}) - (X^N - X^{N-1}) \cdot \nabla_x f(X^{N-1}) \\ &= f(X) - f(X^{N-1}) - (X - X^{N-1}) \cdot \nabla_x f(X^{N-1}) \\ &\quad - (X^N - X) \cdot \nabla_x f(X^{N-1}) \\ &= \frac{1}{2} (X - X^{N-1}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot (X - X^{N-1}) \\ &\quad - (X^N - X) \cdot \nabla_x f(X^{N-1}) + \varepsilon \\ &= \varphi + \varepsilon \end{aligned}$$

$$(X - X^N) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi dt + \varepsilon'$$

L'opérateur d'intégration est borné ; il existe  $k$  tel que :

$$\left\| \int_{t_0}^{t_f} \varphi dt \right\| < k \cdot \|\varphi\|$$



De même  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et  $\nabla_x f$  sont supposés bornés par  $m$   
On déduit alors :

$$\|x - x^N\| \leq k [m \cdot \|x - x^{N-1}\|^2 + m \|x - x^{N-1}\|]$$

D'où :

$$\|x - x^N\| \leq \frac{k \cdot m}{1 - k m} \|x - x^{N-1}\|^2$$

ce qui montre la convergence quadratique. Cette propriété caractérise avec la monotonie, les propriétés de la quasilinearisation.

Nous allons maintenant utiliser cette méthode d'approximation des solutions de systèmes différentiels pour le problème d'identification.

### C) Résolution du problème d'identification par la quasilinearisation.

L'utilisation la plus directe des résultats précédents, serait d'utiliser la quasilinearisation pour intégrer le système d'équations différentielles, posé par les relations d'Euler Lagrange introduites en 3ème partie.

Ici nous exposons une autre façon de procéder. Nous allons, comme plus haut, quasilineariser le problème d'identification en écrivant qu'il est équivalent à :

Trouver les paramètres  $U$  tels que la solution de :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \max_{Y, W} [f(Y, W, t) + (x - Y) \nabla_x f(Y, W, t) + (U - W) \nabla_U f(Y, W, t)] \\ x(t_0) = c \end{cases}$$

minimise :

$$I(U) = \int_{t_0}^{t_f} (x - z)^2 dt$$

.../...



La minimisation du critère I, considérée comme fonction des m paramètres U, est équivalente au système de contraintes qui définit ces m paramètres.

Appliquant comme plus haut la technique de quasilinearisation nous aboutissons à la suite des problèmes :

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{dX^N}{dt} = f(X^{N-1}, U^{N-1}, t) - (X^N - X^{N-1}) \nabla_x f(X^{N-1}, U^{N-1}, t) \\ \quad \quad \quad + (U^N - U^{N-1}) \nabla_u f(X^{N-1}, U^{N-1}, t) \\ X^N(t) = x_0 \end{cases}$$

$$(25) \quad \text{Min} : I(U^N) = \int_{t_0}^{t_f} (Z - X^N)^2 dt$$

Réolvons le système linéaire (24). Il peut s'écrire en regroupant les termes :

$$\frac{dX^N}{dt} = h^N X^N + u_p^N g_p^N + g_0^N$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} h^N = \nabla_x f(X^{N-1}, U^{N-1}, t) \\ g_p^N = \nabla_{u_p} f(X^{N-1}, U^{N-1}, t) \quad p = 1, \dots, m \\ g_0^N = f(X^{N-1}, U^{N-1}, t) - X^{N-1} \nabla_x f - U^{N-1} \nabla_u f \end{cases}$$

Soit  $X_0^N$  la solution de :

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = h^N Y + g_0^N \\ Y(t_0) = X_0 \end{cases}$$

et  $X_p^N$  la solution de :

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = h^N Y + g_p^N \\ Y(t_0) = 0 \end{cases}$$

Alors la solution du système (24) s'écrit, au cause de la linéarité :

$$X^N(t) = X_0^N + \sum_{p=1}^m u_p X_p^N$$

On déduit la forme analytique de I(U) :

$$I(U) = \int_{t_0}^{t_f} (Z - X_0^N - \sum_{p=1}^m u_p X_p^N)^2 dt$$

En posant :

$$V^N = Z - X_0^N$$

$$I(U) = \langle V^N - \sum_{p=1}^m u_p X_p^N, V^N - \sum_{p=1}^m u_p X_p^N \rangle$$



La minimation de cette forme quadratique, se fait comme celle qui intervient dans la méthode du gradient évoluée (Section B de cette partie). Elle conduit au résultat :

$$U^N = (A^N)^{-1} B^N$$

$$\text{avec } A^N = (a_{pq}^N) \quad ; \quad a_{pq}^N = \langle x_p^N, x_q^N \rangle$$

$$B^N = (b_p^N) \quad ; \quad b_p^N = \langle v^N, x_p^N \rangle$$

Appliquant cette procédure, on engendre une suite  $\{X^N; U^N\}$  monotone convergeante quadratiquement vers la solution  $\{X, U\}$ . Pour justifier l'application des conclusions du paragraphe précédent, il suffit d'interpréter le problème d'identification comme le système différentiel de variable  $(X, U)$  :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X, U, t) & + \text{conditions de} \\ \frac{dU}{dt} = 0 & \text{de minimation de } I(U) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

les conditions initiales sur  $U$  étant fournies par les conditions de minimation de  $I(U)$ .

#### D) Algorithme d'identification.

Tenant compte du critère choisi pour notre problème d'identification particulier :

$$I = \int_{t_0}^{t_f} (x_1 - z)^2 dt$$

on peut écrire l'algorithme suivant :

1/ Initialiser par le choix de  $X^0$  et  $U^0$  et poser  $n = 1$

2/ Calculer  $X_0^n, X_p^n$  ;  $p = 1, \dots, m$ , comme solution des systèmes :

$$X_0^N : \begin{cases} \frac{dY}{dt} = h \cdot Y + g_0^N \\ Y(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$X_p^N : \begin{cases} \frac{dY}{dt} = h \cdot Y + g_p^N \\ Y(t_0) = 0 \end{cases}$$

.../...



3/ Calculer la matrice  $A^N$  et le vecteur  $B^N$  :

$$a_{pq} = \int_{t_0}^{t_f} (\dot{x}_p^N) \cdot (\dot{x}_q^N) dt$$

$$b_p = \int_{t_0}^{t_f} (\dot{x}_p^N) \cdot [\dot{x}_0 - (\dot{x}_0^N)] dt$$

4/ Résoudre :

$$A^N U^N = B^N$$

5/ Calculer  $X^N$  :

$$X^N = \sum_{p=1}^m u_p X_p^N + X_0^N$$

Aller en 2 .

Un test de fin de convergence peut être effectué par l'examen de  $\|U_N - U_{N+1}\|^2$  compte tenu de la convergence quadratique de cet algorithme.

E) Comparaison entre les méthodes de gradient et la quasilinearisation

a) Au niveau de la procédure.

Les deux méthodes sont duales. En effet dans les méthodes de gradient on engendre une suite de solutions des équations d'évolution en vue de tendre à la limite vers la solution minimant le critère. En quasilinearisation on engendre une suite de solutions de systèmes auxiliaires, qui vérifient la condition de minimalité, en vue de tendre à la limite vers la trajectoire  $X(t)$  qui vérifie l'équation d'évolution du modèle.

b) Au niveau de l'algorithme.

Une analogie apparaît entre la quasilinearisation et la méthode du gradient évolué. En effet le même problème de minimation y est mis en jeu. De plus si la fonction  $X^n$  est une solution de :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U^n, t)$$



on remarque que les fonctions  $X_p^N$  auxquelles fait appel l'algorithme de quasilinéarisation, sont les mêmes que les fonctions génératrices  $\oint \chi_p^N$  de la méthode du gradient évolué. Cette remarque peut-être pratiquement intéressante dans le cas d'un couplage des deux méthodes.

c) Au niveau des domaines de convergence.

Elles sont complémentaires. En effet pour la méthode du gradient, si le domaine de convergence est large, la vitesse est faible au voisinage de la solution, et des instabilités y sont observées, car dans cette région les gradients sont mal définis. Par contre le domaine de convergence de la méthode de quasilinéarisation est plus restreint, la convergence quadratique demeure efficace au voisinage de l'optimum.

Ces remarques montrent l'intérêt du couplage des deux méthodes.



## PARTIE 5 : PRESENTATION DU PROGRAMME

- 1) ORGANISATION DU PROGRAMME.
- 2) ECRITURE DU PROGRAMME.
- 3) SOUS-PROGRAMME D'ENTREE SORTIE.
  - A) Sous-Programme DONNEE.
  - B) Sous-Programme INTERP.
- 4) SOUS-PROGRAMMES DE CALCUL.
  - A) Sous-Programme VASY.
  - B) Sous-Programme CONV.
  - C) Sous-Programme DET.
  - D) Sous-Programme DIFF.
- 5) UTILISATION DU PROGRAMME.
  - A) Définition du modèle.
  - B) Cartes de contrôle.
  - C) Cartes de données.

- - - -



## PRESENTATION DU PROGRAMME

Un premier programme, qui mettait en oeuvre la méthode du gradient pur pour le cas du problème de contrôle optimal exposée en partie 4-2) A, a été écrit. Les résultats obtenus sur des problèmes tests, ont mis en évidence la faible convergence de cette méthode. En outre il a été possible de trouver un modèle rhéologique satisfaisant, par identification paramétrique. C'est pourquoi nous ne présenterons ici que le programme qui a été écrit pour l'identification paramétrique. Ce programme se trouve en annexe A, dans sa forme opérationnelle, c'est-à-dire dans la forme où il a été utilisé en vue de la modélisation.

### 1) ORGANISATION DU PROGRAMME.

Ce programme résulte du couplage de deux programmes préalablement mis au point, qui transposaient sur l'ordinateur les méthodes du gradient évolué, et de quasilinearisation. L'organigramme de principe se trouve en page 81.

La valeur de la variable logique Q U A S détermine le type de méthode qu'utilise le programme :

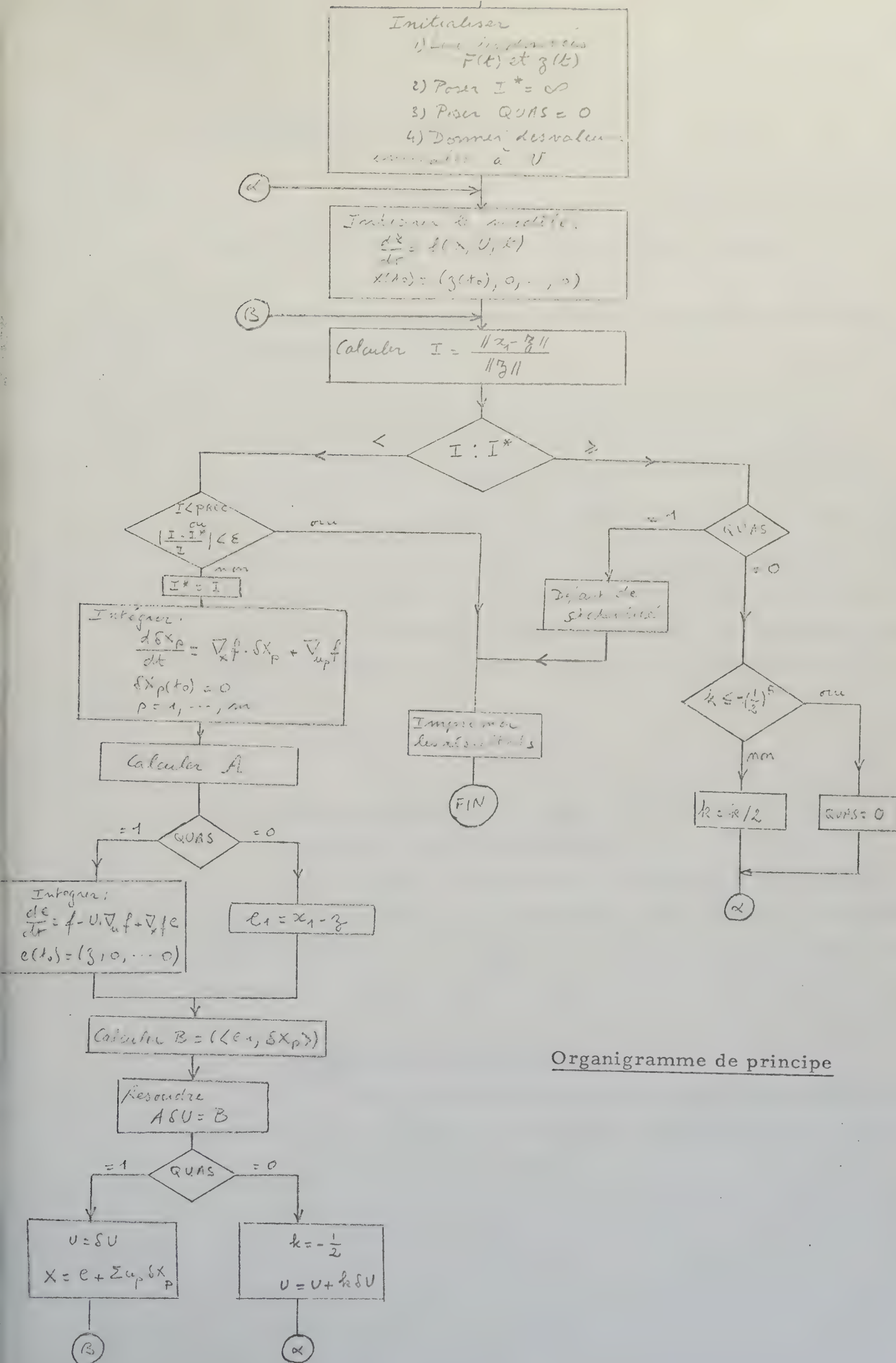
- si Q U A S = 1 il travaille en quasilinearisation,
- si Q U A S = 0 il travaille en méthode du gradient.

Le couplage des deux méthodes s'effectue après qu'un test sur la stabilité de la méthode du gradient ait été effectué.

Le nombre sans dimensions  $DJ = \frac{\|x - \gamma\|^2}{\|\gamma\|^2}$  évalue l'écart relatif en norme entre le modèle et le système physique.

L'organigramme ci-contre permet de visualiser les parties communes aux calculs que nécessitent chacune des deux méthodes.





Organigramme de principe



## 2) ECRITURE DU PROGRAMME.

Le programme a été écrit en FORTRAN IV pour l'ordinateur C D C 3600 . Il est composé des modules suivants :

a) Un programme principal qui est la transcription de l'organigramme.

b) des sous programmes :

- qui organisent les entrées et sorties de données
- qui fournissent les outils nécessaires à l'exécution des opérations élémentaires requises par le programme principal telles que l'intégration de systèmes différentiels, le calcul du produit intérieur de deux fonctions, le calcul des déterminants en vue de résoudre les systèmes d'équations linéaires, et enfin l'intrapolation parabolique des fonctions tabulées.

## 3) SOUS-PROGRAMMES D'ENTREE SORTIE

### A) Sous- programme DONNEE.

Il permet l'introduction en mémoire des paramètres définissant le problème et les fonctions  $y(t)$  et  $F(t)$ . Si le modèle nécessite l'emploi de  $\frac{dF}{dt}$ , cette sous-routine en déclenche le calcul.

### B) Sous- programme INTERP.

Elle organise le dépouillement et la présentation des résultats. Elle peut, sur demande de l'utilisateur (I T R A C = 1), fournir le tracé des courbes  $y(t)$  et  $x(t)$ .

../..



#### 4) SOUS-PROGRAMMES DE CALCUL.

##### A) Sous-programme VASY.

Il réalise l'intégration de systèmes différentiels défini par un sous-programme dont le nom se trouve en argument. De plus il calcule simultanément la matrice A et le vecteur B quand cela est nécessaire, ceci afin de les obtenir avec le maximum de précision.

La méthode d'intégration adoptée est la méthode de Runge-Kutta du 4ème ordre [15]. Elle a été munie d'un contrôle de stabilité par réglage automatique du pas, ce qui permet d'une part une plus grande commodité d'utilisation du programme et d'autre part une économie de mémoire.

##### B) Sous-programme CONV.

Il permet de calculer le produit intérieur de 2 fonctions. L'intégration est réalisée par la méthode de Simpson.

##### C) Sous-programme DET.

Il réalise le calcul des déterminants. La méthode utilisée est celle de la somme des  $M!$  produits, si  $M$  est la dimension. Elle est utilisable ici, car  $M$  est supposée toujours inférieur à 7. Elle a l'avantage de donner un résultat exact, au contraire des méthodes itératives du type méthode de Jourdan.

##### D) Sous-programme DIFF.

Il permet de construire la dérivée par rapport au temps d'une fonction tabulée.



## 5) UTILISATION DU PROGRAMME.

Pour utiliser ce programme, il faut définir le modèle qu'on envisage utiliser, introduire sur des cartes de contrôle les paramètres spécifiant le mode de traitement du problème, introduire les données expérimentales.

### A) Définition du modèle.

Le modèle est spécifié par des équations différentielles :

- introduites dans le sous-programme F MODELE

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U, t)$$

- introduites dans le sous-programme GRAD

$$\frac{dY_p}{dt} = \nabla_x f(X, t, U) \cdot y_p + \nabla_{u_p} f \quad p=1, \dots, m$$

- introduites dans le sous-programme QUAS

$$\frac{dY_1}{dt} = \nabla_x f(X, t, U) y_1 + f(X, U, t) - \sum_p u_p \nabla_{u_p} f$$

$$\frac{dY_p}{dt} = \nabla_x f(X, t, U) y_p + \nabla_{u_{p-1}} f ; p=2, \dots, m+1$$

### B) Cartes de contrôle.

- 1ère carte de contrôle. Elle définit les variables

PAS : pas de temps choisi pour la tabulation des fonctions .

N : nombre de points définissant une fonction .

NX : dimension de la variable d'état ,

NP : nombre de paramètres à estimer .

NIT : nombre maximum d'itérations permis .

PRECS: précision maximum désirée sur DJ

NMIN ) si elle sont  $\neq 0$  elles substituent au problème initial une  
 NPAS ) suite de problèmes dans le nombre de points varie de NMIN  
 ( à N par incréments successifs de NPAS  
 )

NEX : Variable logique qui vaut 0 si le problème défini par cette carte de contrôle est le dernier à traiter.



ITRAC : variable logique qui permet d'obtenir le graphe de  $z(t)$   
et de la courbe optimale  $x(t)$ .

- 2ème carte de contrôle. Elle porte la spécification de la  
courbe expérimentale traitée

C) Cartes de données.

Elles contiennent les  $N$  couples des points de  $F(t)$  et  
 $z(t)$ .



## PARTIE 6 : LES RESULTATS

### 1) METHODOLOGIE.

### 2) LES MODELES ESSAYES.

A) Modèle viscoélastique linéaire.

B) Modèles viscoélastiques non linéaires.

C) Modèles faisant intervenir le vieillissement ou la fatigue.

### 3) CONCLUSION.

- - - -



## LES RESULTATS

### 1) METHODOLOGIE.

Munis de l'outil d'identification, nous pouvons passer maintenant à la phase pratique de la modélisation. D'après ce que nous avons dit en partie 2, le problème restant est de trouver des formes de modèles susceptibles de mener au succès. Dans cette partie nous avons montré qu'un bon modèle devait être dynamique, et inspiré de l'hypothèse de la viscoélasticité.

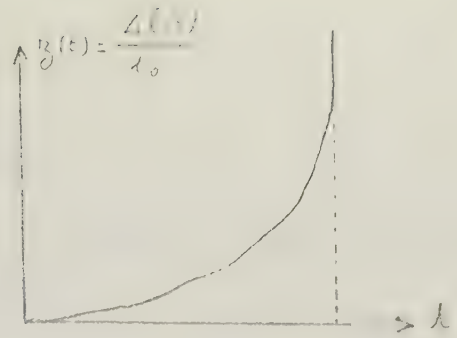
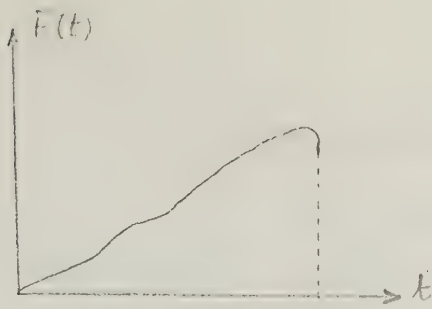
La procédure va constituer à envisager des modèles simple qu'il faudra affiner, en fonction des résultats qu'il donneront et en fonction d'idées élémentaires sur le matériau. Lorsqu'un tel modèle sera élaboré, son identification sera faite sur une expérience simple, et suivant une méthode qui permettra de :

- 1) faire une première évaluation de l'étendue du domaine de validité,
- 2) faire un premier test du caractère prévisionnel du modèle élaboré.

#### L'expérience de base.

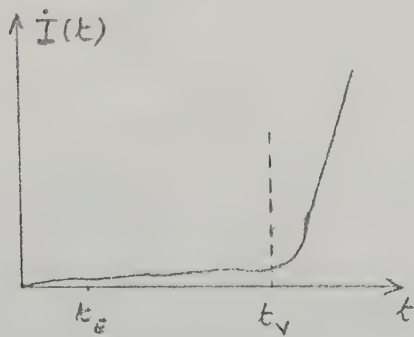
L'expérience devra concerner les états de l'éprouvette depuis l'état de référence jusqu'à la rupture. Comme, de plus, dans les premiers modèles nous n'envisagerons pas de prendre en compte des phénomènes de fatigue, nous considérerons une expérience d'essai du matériau en traction simple : la vitesse d'accroissement des sollicitations est sensiblement constante jusqu'au voisinage de la rupture,





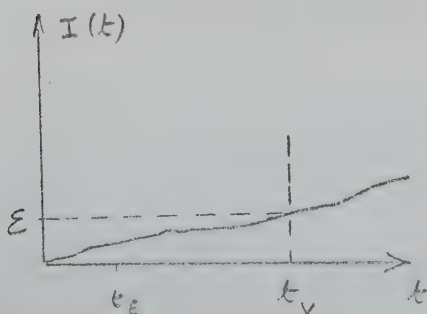
### Estimation du domaine de validité.

Il est possible de montrer expérimentalement que notre matériau vérifie le modèle de l'élasticité pure dans un domaine peu étendu, mais non nul, situé dans la région des faibles déformations. Pour un essai donné il correspond une zone des temps  $[t_o, t_E]$ . Mais nous savons que les modèles viscoélastiques incluent les modèles élastiques. Aussi devra-t-on trouver un domaine  $[t_o, t_V]$  incluant  $[t_o, t_E]$  pour lequel le modèle est vérifiable. Pour déterminer le temps  $t_V$  pour un modèle donné il suffira de considérer la courbe  $\dot{J}(t) = \frac{\dot{F}(t)}{\dot{F}_0}$  de l'indice de performance relatif obtenu pour une identification effectuée sur  $[t_o, t]$ . S'il existe un domaine de validité bien nette pour un tel modèle on devrait observer une rupture de pente sur la courbe ; elle définira la limite  $t_V$



du modèle. Si la rupture de pente est nette, cela signifie que très probablement le phénomène physique change de forme. Dans ce cas on pourra se contenter de trouver un autre modèle pour représenter le matériau pour ses états  $x > x(t_V)$ .

Il se peut par contre que cette rupture de pente ne soit pas nette. Alors si on désire conserver ce modèle il faudra déterminer le domaine de validité par le choix d'un seuil  $\varepsilon$  sur  $I$ . Mais dans ce cas



on aura intérêt à sophistiquer le modèle de manière à compenser l'écart  $I$  pour les zones éloignées de l'état de référence.



### Test de prévisionnabilité.

Il peut se faire lors de l'identification pas à pas entre  $t_0$  et  $t$  en extrapolant le modèle ajusté, au delà de  $t$ .

Si un modèle s'avère prévisionnel, pour cette expérience, dans le domaine de validité, on peut passer à la phase de vérification en comparant le comportement du modèle dans le cas d'autres expériences telles que le fluage, la relaxation, la sollicitation périodique.

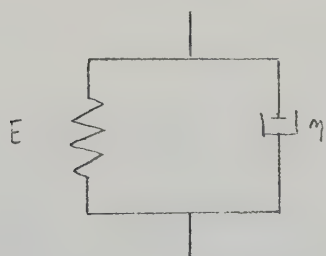
Si le modèle s'avère éloigné du système physique, pour un domaine de validité choisi, on devra :

- soit réduire son domaine de validité,
- soit le modifier.

## 2) LES MODELES ESSAYES.

### A) Modèle viscoélastique linéaire.

Le modèle analogique est simple : c'est un montage en parallèle d'un ressort de rigidité  $E$  et d'un amortisseur fluide de viscosité  $\eta$ .



L'allongement relatif  $x$  est la variable d'état de ce système. L'équation dynamique s'écrit simplement :

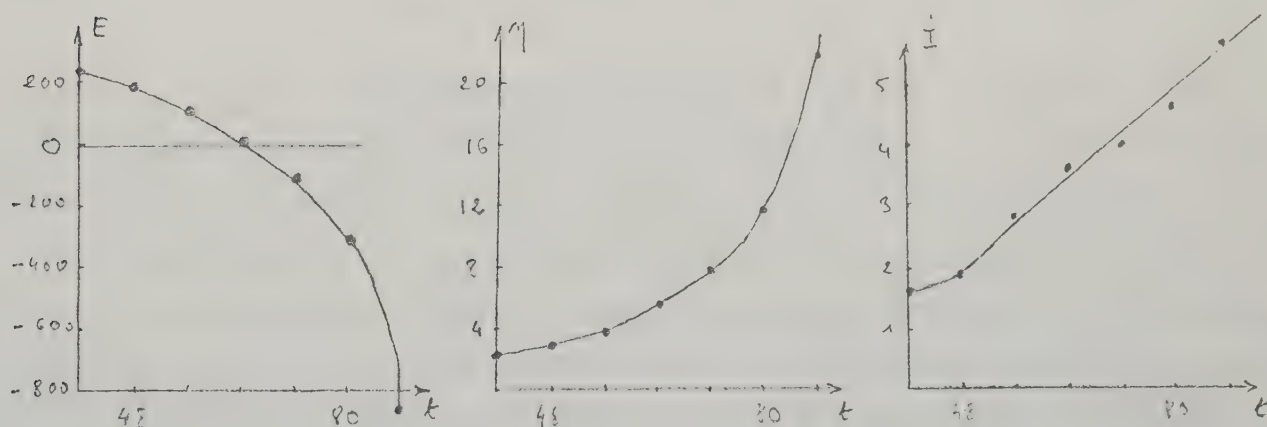
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{E}{\eta} x + \frac{1}{\eta} F(t)$$

Pour une expérience de traction à vitesse de mise en contrainte sensiblement proportionnelle au temps, l'identification pas à pas a fourni les résultats suivants :

.../...



| t (s) | E (h b) | $\eta$ ( $10^{10}$ P) | I ( $10^{-3}$ ) |
|-------|---------|-----------------------|-----------------|
| 40    | 219     | 2,1                   | 1,6             |
| 48    | 175     | 2,8                   | 1,9             |
| 56    | 105     | 3,9                   | 2,9             |
| 64    | 23      | 5,5                   | 3,6             |
| 72    | - 97    | 7,7                   | 4,0             |
| 80    | - 321   | 11,8                  | 4,6             |
| 88    | - 869   | 21,5                  | 5,6             |



Les valeurs du critère d'optimalité, pour les identifications optimales, sont relativement élevées (de l'ordre de  $10^{-3}$ ) ce qui traduit l'inadéquation du modèle. Sur la planche I jointe en annexe B on pourra juger de l'écart entre la courbe expérimentale et la courbe théorique fournie par le modèle identifié. Le graphe J (t) montre la croissance de l'écart entre le système et le modèle, lorsque l'on atteint le domaine des fortes elongations.

.../...



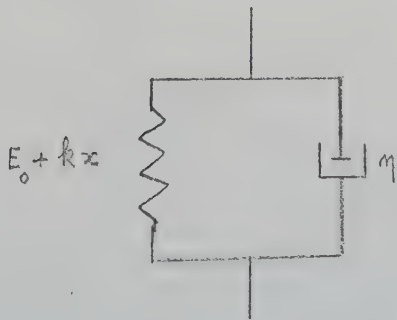
L'examen des graphes  $E(t)$  et  $\eta(t)$  montre une évolution des paramètres  $E$  et  $\eta$  avec l'étendue du domaine d'identification, ce qui indique que le modèle n'est pas prévisionnel. En effet, s'il l'était, les valeurs identifiées de  $E$  et  $\eta$  devraient demeurer sensiblement constantes dans le temps. Cette non-prévisibilité est confirmée par l'examen sur la planche I de l'écart entre la courbe théorique extrapolée et la courbe expérimentale.

De plus l'examen du graphe  $E(t)$  nous conduit à rejeter l'hypothèse de la linéarité du modèle. En effet elle implique pour des temps supérieurs à 64 s, l'apparition de rigidités  $E$  négatives, ce qui est physiquement absurde.

#### B) Modèles viscoélastiques non linéaires.

##### a) Rigidité de forme : $E = E_0 + kx$

N'ayant aucune idée de la forme des non linéarités, que les essais du modèle précédent nous laissent présumer, nous avons supposé que l'une d'elles au moins devait intéresser le terme de rigidité. En effet l'examen des courbes de traction montre que les déformations se font plus rapidement en fin de courbe, quelque soit le régime des déformations ce qui exclut la prépondérance d'une non linéarité du terme de viscosité. Une forme linéaire a été choisie pour  $E(x)$ , car elle peut toujours être considérée comme une approximation du premier ordre de  $E(x)$ .



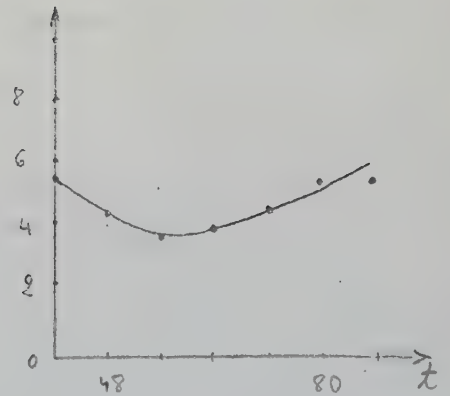
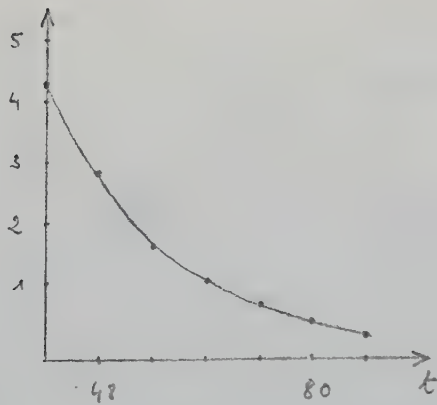
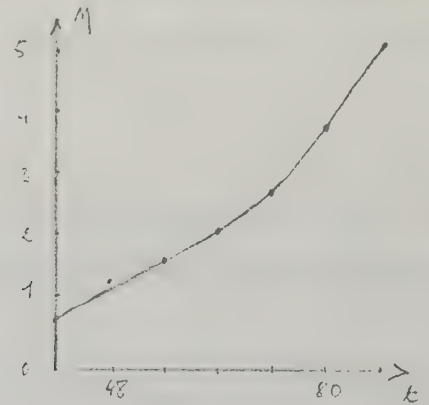
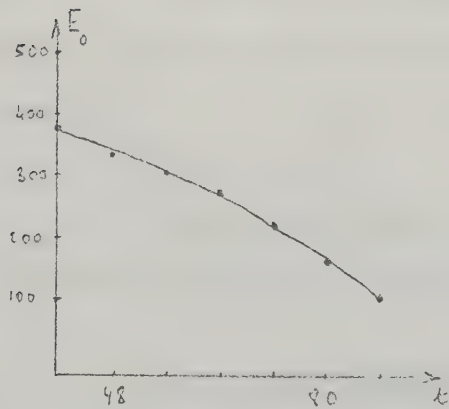
L'équation dynamique s'écrit pour ce modèle :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{E_0}{\eta} (1 + kx) x + \frac{1}{\eta} F(t)$$



Les résultats de l'identification pas à pas, pour l'expérience de base ont été :

| $t$ (s) | $E_o$ (hb) | $\gamma$ ( $10^{10} P$ ) | $k$ ( $10^2$ ) | $I$ ( $10^{-4}$ ) |
|---------|------------|--------------------------|----------------|-------------------|
| 40      | 373        | 0,77                     | 4,18           | 5,61              |
| 48      | 333        | 1,18                     | 2,89           | 4,38              |
| 56      | 306        | 1,47                     | 1,63           | 3,54              |
| 64      | 276        | 1,98                     | 1,05           | 3,99              |
| 72      | 228        | 2,69                     | 0,66           | 4,42              |
| 80      | 162        | 3,89                     | 0,39           | 5,59              |
| 86      | 100        | 5,08                     | 0,27           | 5,54              |



.../...



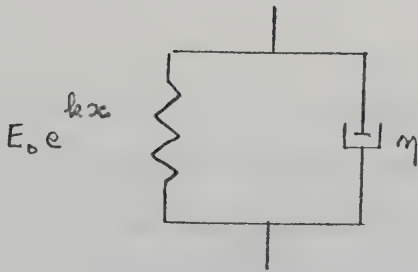
Les valeurs du critère d'optimalité sont nettement inférieures au cas précédent (de l'ordre de  $10^{-4}$  au lieu de  $10^{-3}$ ), ce qui montre une meilleure adéquation du modèle.

Cependant, comme précédemment, les graphes  $E_o(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $k(t)$  montrent une évolution en fonction de l'étendue du domaine d'identification. Ceci est le signe de mauvaises qualités prévisionnelles.

Pour un domaine d'identification donné, les paramètres identifiés sont des pondérations de leurs valeurs sur ce domaine. L'examen de  $E_o(t)$  et  $k(t)$  montre que la rigidité pondérée, donc la rigidité  $E(x)$ , décroît, lorsque le domaine d'identification est accru. Par contre, la stabilité de la trajectoire théorique  $x(t)$  est garantie par la positivité  $E(x)$ . Or une forme linéaire pour  $E(x)$  permet des rigidités négatives, qui pourraient expliquer les mauvaises qualités prévisionnelles de ce modèle.

Aussi pour tenir compte de ces remarques a-t-on été amené à envisager un modèle à rigidité fonction exponentielle de l'élongation  $x$ .

b) Rigidité exponentielle  $E = E_o e^{kx}$



L'équation d'évolution du modèle est de la forme :

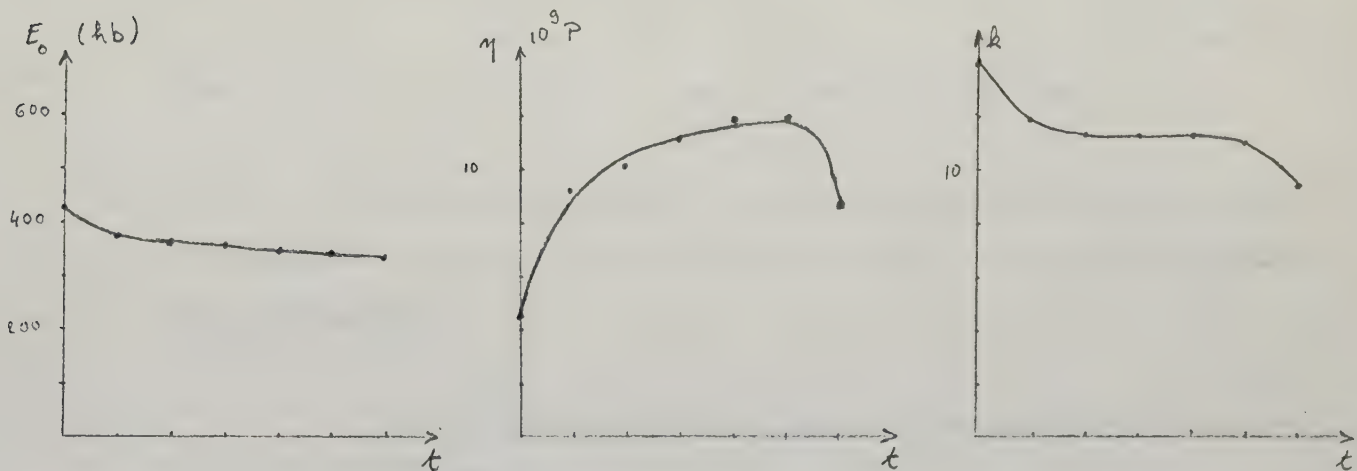
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{E_o}{\eta} x e^{kx} + \frac{1}{\eta} F(t)$$

../..



L'identification pas à pas a donné les résultats suivants :

| t (s) | E (hb) | $\eta$ ( $10^9 P$ ) | k ( $10^2$ ) | I ( $10^{-4}$ ) |
|-------|--------|---------------------|--------------|-----------------|
| 40    | 423    | 4,51                | - 14         | 6,3             |
| 48    | 372    | 8,96                | - 12         | 4,6             |
| 56    | 361    | 9,92                | - 11,6       | 2,7             |
| 64    | 351    | 11,2                | - 11,5       | 1,9             |
| 72    | 341    | 11,8                | - 11,5       | 1,5             |
| 80    | 344    | 11,8                | - 11,3       | 0,8             |
| 88    | 339    | 8,17                | - 9,7        | 2,8             |



L'adéquation du modèle apparaît meilleure que précédemment puisque certaines valeurs de  $I(t)$  sont inférieures à  $10^{-4}$ . D'ailleurs, il est fort probable que l'écart  $I(t)$  entre le modèle et le système est constitué par le bruit sur les mesures de la courbe expérimentale. En effet un examen de la planche II placée en annexe B montre que la courbe théorique colle de très près la courbe expérimentale, les écarts entre les deux courbes paraissant aléatoires et de l'ordre de grandeur des erreurs de tracé. De plus, afin de diminuer  $I(t)$ , nous avons essayé d'affiner le modèle en introduisant un terme supplémentaire dans l'expression de la rigidité :

$$E = E_0 e^{k_1 x + k_2 x^2}$$



L'identification n'a pas permis d'améliorer sensiblement  $I(t)$  et l'estimation du terme  $k_2$  était voisine de zéro.

L'examen des graphes  $E(t)$ ,  $k(t)$ ,  $\eta(t)$  montre une large zone centrale dans laquelle les estimations de paramètres sont particulièrement stationnaires. Ce qui laisse soupçonner de bonnes qualités prévisionnelles pour le modèle.

Les mauvaises valeurs obtenues pour les faibles domaines d'identification sont certainement dues à un manque d'information, en particulier les effets du terme non linéaire de la rigidité, ainsi que le terme de viscosité n'y sont pas encore fortement ressentis.

Celles obtenues pour les larges domaines d'identification proviennent du fait que la rupture est démarrée ; le phénomène physique n'est plus le même.

La planche II de l'annexe met en évidence les qualités prévisionnelles de ce modèle.

### C) Modèles faisant intervenir le vieillissement ou la fatigue.

Le modèle précédent se borne à décrire le matériau dans un domaine où ses caractéristiques propres sont supposées ne pas changer. En effet l'expérience de base dont nous tirons l'information ne peut mettre en évidence les phénomènes de fatigue.

Les phénomènes de fatigue apparaissent lorsque le matériau a été soumis à de nombreuses sollicitations. Ils se traduisent par une évolution de ses propriétés : phénomène d'hystérésis (le matériau libéré ne reprend pas son état initial), matériau plus cassant, etc ...



Afin de traduire cette évolution il faut introduire dans le modèle des variables capables de rendre compte de l'histoire du matériau et, pour ce faire, établir des hypothèses supplémentaires.

Supposons que, tant que le matériau n'est pas trop détérioré il est possible de l'identifier à tout instant par un modèle à rigidité exponentielle. La fatigue se traduira par une évolution des paramètres dans le temps. On peut admettre qu'elle doit se faire au prorata des sollicitations que le matériau aura subi par le passé. Il nous faut imaginer une variable  $\tau$  traduisant les effets cumulatifs des déformations successives, par exemple :

$$\tau = \int_{t_0}^{t_f} (x - x_0)^2 dt$$

Un modèle simple traduisant l'hystérésis du matériau, pourrait être obtenu en admettant qu'à chaque instant l'état de référence est :

$$x = k_2 \cdot \tau \quad \text{et non } x = 0$$

L'équation d'évolution d'un tel système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = - \frac{E_0}{\eta} (x - x_0) e^{k_1 x} + \frac{1}{\eta} F(t) \\ \frac{dx_0}{dt} = k_e (x - x_0)^2 \end{cases}$$

La variable d'état est ici un vecteur de dimension 2 :

$$X = (x, x_0).$$

Le programme correspondant à l'identification de ce modèle a été écrit. Aucun résultat valable n'a encore été obtenu, car les expériences actuellement réalisées ne permettent pas de rendre suffisamment compte de la fatigue.



### 3) CONCLUSION.

Nous avons pu construire un modèle non linéaire de représentation du matériau. Ce modèle est valable dans un large domaine jusqu'à l'amorce de la rupture.

L'exploitation du modèle conduit à des valeurs différentes des paramètres. Ceci montre l'hétérogénéité de la qualité des échantillons. Mais l'identification permet de donner une description précise de chaque échantillon ; ainsi en étudiant la population des résultats, une bonne description statistique de la fabrication du matériau est possible. A partir de cette description on peut espérer établir des corrélations entre les paramètres de fabrication du matériau et sa qualité, donc améliorer le contrôle de la fabrication.

L'autre utilisation du modèle est de l'exploiter en tant qu'outil prévisionnel. Les prévisions devront bien sûr être affectées des intervalles de confiance, résultant de la distribution statistique des caractéristiques du matériau.

---



## - REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES -

-----

- 1        AUSLENDER        - "Méthodes d'optimisation dans la théorie du  
                              contrôle" - Université de Grenoble Service de  
                              Math. Appl.
- 2        ATHANS & FALB  
                              - "Optimal Control" - Mac Graw Hill (1966).
- 3        BELLMAN        - "Dynamic Programming" - Princeton University,  
                              Princeton N. J. (1957).
- 4        BELLMAN & KALABA  
                              - "Différential Equations and Quasilinearisation" -  
                              Princeton University Press, Princeton N. J.
- 5        CODDINGTON & LEVINSON  
                              - "Theory of Ordinary Differential Equations " -  
                              Mac Graw Hill - New York (1965)
- 6        CUENOD        - "Identification des systèmes" - Journée d'information  
                              du 24 avril 1969 - IRIA France.
- 7        DESTOUCHES        - "Méthodes récentes de la physique mathématique" -  
                              Cours donné à l'Institut Henri Poincaré en 1969 -  
                              Paris.
- 8        DREYFUS        - "Dynamic Programming and the Calculus of Varia-  
                              tions" - Princeton University Press (1964).
- 9        FALB & ATHANS  
                              - "A Direct Proof of the Criterion for complete  
                              Controlability of Time Invariant Linear Systems"-  
                              I. E. E. E. Trans. Autom. Control, vol. AC-9,  
                              (1964).
- 10      FAVE        - "Critère de convergence par approximation de l'optimum  
                              pour la méthode du gradient"-ONERA - (92)  
                              Chatillon France.







- 21 MIELE - "Variationnal Approach to the Gradient Method Theory and Experiments" - Lectures Notes in Operations Research and Mathematical Economics 14
- 22 MARKUS - "Controlability for Non Linear Processes" - J. Soc. Ind. App. Math, Serie A, Controls 3, (1965)
- 23 PERSOZ - "Introduction à l'étude de la rhéologie" - Dunod Paris (1960).
- 24 PERSOZ - "La rhéologie" - Masson & Cie (1969).
- 25 RUND - "The Hamilton - Jacobi - Theory in the Calculus of Variations" - The New University Mathematics Series - Princeton N. J. (1966).
- 26 VAINBERG - "Variational Methods for the Study of Non Linear Operators" - Holden Day San Francisco (1964).



A N N E X E   A

-----

LE PROGRAMME FORTRAN

- -



```

PROGRAM CLAXKU
EXTERNAL FMODELE,GRAD,QUAS
LOGICAL INST
LOGICAL QUASIL,NEX,ITRAC
DOUBLE PRECISION VECT,TAB ,AUX,DT,D
COMMON /A/ Y(500)
COMMON /QS/ XQ(21,500)
COMMON /B/ X(3,500)
COMMON /C/ ECART(500)
COMMON /D/ F(500),DF(500),PARAM(6),DPAR(6)
COMMON /E/ PAS,N,NX,NP,NIT,NEX,PRECIS
COMMON /F/ VECT(6),TAB(6,6),AUX(6,6)
COMMON /G/ FT(3),ECT(3),DFT(3),XT(3,3),YT(3)
COMMON /H/ NMIN,NPAS,ITRAC,SECT
COMMON /I/ XZERO(21),NMAX
COMMON /STOCK/IP,IC,ICODE,ITITRE(5),NPOINTS,XMIN,YMIN,XCHEL,YCHEL
COMMON /J/ V(500)
COMMON /K/ INST
DIMENSION ICOM(6),ZERO(21)
DATA (ICOM(1)=8H PAR1)
DATA (ICOM(2)=8H PAR2)
DATA (ICOM(3)=8H PAR3)
DATA (ICOM(4)=8H PAR4)
DATA (ICOM(5)=8H PAR5)
DATA (ICOM(6)=8H PAR6)
PRINT 304
304 FORMAT (5X,*CE PROGRAMME IDENTIFIE LES PARAMETRES P DU MODELE*/
15X,*SUIVANT PAR ANALYSE DES ETATS X PAR RAPPORT AUX ENTREES F*/
2)
PRINT 305
305 FORMAT (//////10X,* DX/DT = P1.X.EXP(P2.X) + P3.F(T)*)
F(1)=Y(1)=0.
NPOINTS = -999
CALL TRACDAT(F(1),Y(1),45)
NUTSUP = 5
IP = 46 $ IC = 0
C PARAMETRES DU CALCUL
DO 222 I = 1,21
XZERO(I) = 0.
222 ZERO(I) = 0.
66 CALL DONGEE
XZERO(1) = Y(1)
NB = NP
NF = NX
NG = NP*NX
NQ = NG+NX
NMAX = N
IF (NPAS.NE.0) GO TO 75
NMIN = N
NPAS=1
75 DO 65 N=NMIN,NMAX,NPAS
NUT = 0
PRINT 100 ,N,PRECIS,PAS
100 FORMAT (1H1,5X,*PARAMETRES DU CALCUL*//
110X,*NOMBRE DE POINTS*,15X,110/
310X,*PRECISION DE L OPTIMISATION*,4X,E10.3/

```



```

410X,*TEMPS ELEMENTAIRE*,14X,F10.4,* S.*)
DO 40 I=1,N
40 V(I) =Y(I) * Y(I)
CALL CONV(YNORME)
PRINT 227 ,YNORME
227 FORMAT (10X,*NORME DE Y *,20X,E10.3)
PRINT 101,(ICOM(J),J=1,NP)
101 FORMAT(/1X,* NO DJ DJREL*,6(4X,A8))
92 PRINT 45
45 FORMAT (/5X,*GRADIENT*)
QUASIL =0
ITER = 0
ETOILE = 1.0E+300
C INTEGRATION DU MODELE THEORIQUE
10 CALL VASY(XZERO,FMODELE,1,NF)
IF (INST) GO TO 132
C CALCUL DE L'ECART AVEC LE SYSTEME THEORIQUE
11 DO 4 I=1,N
ECART(I) = X(1,I) -Y(I)
4 V(I) = ECART(I) * ECART(I)
CALL CONV(DJ)
IF (DJ.LE.ETOILE) GO TO 12
IF (QUASIL) GO TO 64
NUT = NUT +1
IF (NUT .GE.NUTSUP) GO TO 130
C REDUIRE LE TAUX DE DESCENTE
132 COEF = COEF/2.
DO 30 I=1,NP
30 PARAM(I) = PARAM(I)-COEF *DPAR(I)
GO TO 10
130 DO 131 I=1,NP
131 PARAM(I) = PARAM(I) - COEF*DPAR(I)
ETOILE = DJ
GO TO 89
C ESTIMATION DE L'ECART RELATIF
12 EPS = (ETOILE-DJ)/ETOILE
EPS = ABSF(EPS)
IF (EPS.LT.0.005) GO TO 63
ETOILE = DJ
DJREL = DJ/YNORME
GO TO 46
89 QUASIL = 1
ITER = 0
PRINT 44
44 FORMAT (/5X,*QUASILINEARISATION*)
46 ITER = ITER+1
PRINT 102,ITER,DJ,DJREL,(PARAM(K),K=1,NP)
102 FORMAT (14,8(2X,E10.3))
IF (ITER.GT.NIT) GO TO 63
IF (DJREL.LT.PRECIS) GO TO 63
C NOUVELLE ITERATION
DO 99 I=1,NP
VECT(I) = 0.
DO 99 J=1,NP
99 TAB(I,J) = 0.
IF (QUASIL) GO TO 88

```



```

      CALL VASY (ZERO,GRAD,2,NG)
      GO TO 87
88 CALL VASY (XZERO,QUAS,3,NQ)
87 CALL DET(TAB,NP,D)
      IF (D.EQ.0.) GO TO 61
      DO 77 K=1,NP
      DO 76 I=1,NP
      DO 76 J=1,NP
      AUX(I,J) = TAB(I,J)
      IF (J.EQ.K) AUX(I,J) = VECT(I)
76 CONTINUE
      CALL DET(AUX,NP,DT)
77 DPAR(K) = DT/D
      IF (QUASIL) GO TO 72
C METHODE DU GRADIENT
      COEF = -0.5
      DO 7 I=1,NP
7 PARAM(I) = PARAM(I) + DPAR(I)*COEF
      NUT = 0
      GO TO 10
C METHODE DE QUASILINEARISATION
72 DO 71 I=1,NP
      ZUT = PARAM(I)
      PARAM(I) = DPAR(I)
71 DPAR(I) = ZUT
      DO 502 I=1,NX
      DO 502 K=1,N
502 X(I,K) = XQ(I,K)
      DO 503 J=1,NP
      LD = J*NX
      DO 504 I=1,NX
      II = I + LD
      DO 504 K=1,N
504 X(I,K) = X(I,K) + PARAM(I)*XQ(II,K)
503 CONTINUE
      GO TO 11
61 PRINT 62
62 FORMAT (//10X,*MATRICE SINGULIERE*/)
63 CALL INTERP
      GO TO 65
64 PRINT 120,DJ
120 FORMAT (/20X,*DEFAULT DE STABILITE-DJ = ,E10.3)
      DO 95 I=1,NP
95 PARAM(I) = DPAR(I)
      GO TO 63
65 CONTINUE
      IF (NEX) GO TO 66
      NPOINTS = 0
      CALL TRACDAT ( Y(1),F(1),45)
      STOP
      END

```



```
SUBROUTINE DONGEE
LOGICAL NEX, ITRAC
COMMON /A/ Y(500)
COMMON /D/ F(500), DF(500), PARAM(6), DPAR(6)
COMMON /E/ PAS, N, NX, NP, NIT, NEX, PRECIS
COMMON /H/ NMIN, NPAS, ITRAC, SECT
COMMON /STOCK/ IP, IC, ICODE, ITITRE(5), NPOINTS, XMIN, YMIN, XCHEL, YCHEL
READ 4, (ITITRE(I), I=1,5)
READ 5, PAS, N, NX, NP, NIT, PRECIS, NMIN, NPAS, NEX, ITRAC, SECT
5 FORMAT ( F5.2, 4I5, E10.3, 2I5, 2L2, F6.1)
PRINT 14, (ITITRE(I), I=1,5)
14 FORMAT (1H1////10X, 5A8)
4 FORMAT (10A8)
READ 12, ((F(K), Y(K)), K=1, N)
12 FORMAT (8(F5.2, F5.3))
PARAM(1) = -3.807
PARAM(2) = -9.241
PARAM(3) = 3.779E-3
PRINT 10
10 FORMAT (//2(8X, *F(T)*, 9X, *Y(T)*, 3X)/)
PRINT 11, ((F(K), Y(K)), K=1, N)
11 FORMAT (2(5X, E10.3, 3X, E10.3))
RETURN
END
```



```

SUBROUTINE VASY (XZERO,DERIVE,MEM,NX)
EXTERNAL DERIVE
LOGICAL INST
DOUBLE PRECISION VECT,TAB,AUX,DELTA
COMMON /QS/ XQ(21,500)
COMMON /B/ X(3,500)
COMMON /C/ ECART(500)
COMMON /D/ F(500),DF(500),PARAM(6),DPAR(6)
COMMON /E/ PAS,N,NXA,NP,NIT,NEX,PRECIS
COMMON /F/ VECT(6),TAB(6,6),AUX(6,6)
COMMON /G/ FT(3),ECT(3),DFT(3),XT(3,3),YT(3)
COMMON /K/ INST
DIMENSION Y(21),A(21),B(21),C(21),XZERO(21),YP(21),D(21)
INST = 0
PTMAX = 0.1
PTMIN = 0.03
MASK = 1B
DO 11 I=1,NX
  IF (MEM.EQ.1) X(I,1) = XZERO(I)
  XQ(I,1) = XZERO(I)
11 Y(I) = XZERO(I)
  S = 0.
  EC = 0.
  K = 1
  NN = 64
  NNI = 2
  NSUP = 1 000 000B
  XNN = NN
  H = PAS/XNN
  ET = 1./XNN
C BOUCLE D INTEGRATION
DO 10 L=2,N
  LD = 1
  IF (K.NE.1) S = 1.
  CALL INTRAP (MEM,K)
  GO TO 8
C RALLONGEMENT DU PAS
16 NN = NN/2
  XNN = NN
  H = PAS/XNN
  ET = 1./XNN
  LD = J/2 + 1
  IF (LD.GT.NN) GO TO 17
  GO TO 8
C DIMINUTION DU PAS
6 NN = NN*2
  XNN = NN
  H = PAS/XNN
  ET = 1./XNN
  LD = 2*J-1
C BOUCLE DE PRECISION
8 DO 4 J=LD,NN
  AE = J-1
  E = AE*ET+S
  CALL DERIVE (K,E,Y,A)
  IF (INST) RETURN

```



```

DO 1 I=1,NX
D(I) = A(I)
A(I) = H*A(I)
B(I) = Y(I)+0.5*A(I)
1 C(I) = A(I)
E = E + 0.5*ET
CALL DERIVE (K,E,B,A)
TEM = 0.
DO 2 I=1,NX
DA = D(I) - A(I)
D(I) = ABSF(D(I))
DA = ABSE(DA)
DAX = 100.*DA
IF (DAX.LT.D(I)) GO TO 32
TEST = DA/(D(I)*(1.+D(I)*D(I))*1.5)
TEM = AMAX1 (TEST,TEM)
IF ((NN.LT.NSUP).AND.(TEST.GT.PTMAX)) GO TO 6
32 A(I) = H*A(I)
B(I) = Y(I) +0.5*A(I)
2 C(I)=C(I)+2.*A(I)
CALL DERIVE (K,E,B,A)
DO 3 I=1,NX
A(I)=H*A(I)
B(I)=Y(I)+A(I)
3 C(I)=C(I)+2.*A(I)
E = E + 0.5*ET
CALL DERIVE (K,E,B,A)
DO 9 I=1,NX
IF (MEM.NE.1) YP(I) = Y(I)
9 Y(I)=Y(I)+(C(I)+H*A(I))/6.
GO TO(15,25,26) MEM
25 ECP = EC
LC = 1
EC = (ECT(3)*E+ECT(2))*E+ECT(1)
GO TO 27
26 ECP = EC
LC = NXA +1
EC = (YT(3)*E +YT(2))*E +YT(1)-Y(1)
C EVALUATION DU SYSTEME LINEAIRE
27 M=0
H2 = 0.5*H
DO 30 I=LC,NX,NXA
MM = M
M = M+1
DELTA = H2*(Y(I)*EC+YP(I)*ECP)
VECT (M) = VECT(M) + DELTA
DO 30 IM=I,NX,NXA
MM = MM +1
DELTA = H 2*(Y(I)*Y(IM)+ YP(I)*YP(IM))
30 TAB(M,MM) = TAB(M,MM) + DELTA
15 NPAR = MASK.AND.J
IF ((NPAR.EQ.0).AND.(TEM .LT.PTMIN).AND.(NN.GT.NNI)) GO TO 16
4 CONTINUE
17 K = K+1
IF (MEM.NE.3) GO TO 75
DO 76 I=1,NX

```



```
76 XQ(I,L) = Y(I)
75 IF (MEM.NE.1) GO TO 10
DO 5 I = 1,NX
5 X(I,L) = Y(I)
100 FORMAT (5(5X,E10.3))
10 CONTINUE
C TERMINAISON
IF (MEM.EQ.1) RETURN
LN = NP-1
DO 31 I=1,LN
II = I+1
DO 31 J=II,NP
31 TAB(J,I) = TAB(I,J)
RETURN
END
```



```

SUBROUTINE INTRAP (MEM,K)
COMMON /A/ Y(500)
COMMON /B/ X(3,500)
COMMON /C/ ECART(500)
COMMON /D/ F(500),DF(500),PARAM(6),DPAR(6)
COMMON /E/ PAS,N,NX,NP,NIT,NEX,PRECIS
COMMON /G/ FT(3),ECT(3),DFT(3),XT(3,3),YT(3)
L= K-1
IF (K.EQ.1) L=K
C INTRAPOLATION DE F ET DEDF
FT(1) = F(L)    S  DFT(1) = DF(L)
L= L+1
DF1 = DF(L)-DFT(1)
L= L+1
F2 = F(L) -FT(1)
DF2 = DF(L) -DFT(1)
FT(3) = 0.5*F2-F1  S  DFT(3) = 0.5*DF2-DF1
FT(2) = 2.*F1-0.5*F2  S  DFT(2) = 2.*DF1-0.5*DF2
F1 = F(L)-FT(1)
IF (MEM.EQ.1) RETURN
C INTRAPOLATION DE X(I,J)
DO 1 I=1,NX
L=L-2
XT(I,1) = X(I,L)
L=L+1
F1 = X(I,L) -XT(I,1)
L=L+1
F2 = X(I,L) -XT(I,1)
XT(I,3) = 0.5*F2-F1
XT(I,2) = 2.*F1-0.5*F2
1 CONTINUE
IF (MEM.EQ.3 ) GO TO 3
C INTRAPOLATION DE ECART
L= L-2
ECT(1) = ECART(L)
L= L+1
F1 = ECART(L) -ECT(1)
L= L+1
F2 = ECART(L) -ECT(1)
ECT(3) = 0.5*F2-F1
ECT(2) = 2.*F1- 0.5*F2
RETURN
C INTRAPOLATION DE Y
3 L= L-2
YT(1)=Y(L)
L= L+1
F1 = Y(L) - YT(1)
L= L+1
F2 = Y(L) - YT(1)
YT(3) = 0.5*F2-F1
YT(2) = 2.*F1-0.5*F2
RETURN
END

```



```
SUBROUTINE FMODELE (K,E,XX,A)
LOGICAL INST
COMMON /D/ F(500),DF(500),PARAM(6),DPAR(6)
COMMON /G/ FT(3),ECT(3),DFT(3),XT(3,3),YT(3)
COMMON /K/ INST
DIMENSION XX(21),A(21)
DFC = (DFT(3)*E+DFT(2))*E+DFT(1)
FC = (FT(3)*E+FT(2))*E+FT(1)
EX1= PARAM(2)*XX(1)
IF (EX1.GT.20.) INST = 1
EX = EXPF(EX1)
A(1) = PARAM(1)*XX(1)*EX + PARAM(3)*FC
RETURN
END
```



```
SUBROUTINE GRAD(K,E,XX,A)
COMMON /D/ F(500),DF(500),PARAM(6),DPAR(6)
COMMON/E/ PAS,N,NX,NP,NIT,NEX,PRECIS
COMMON /G/ FT(3),ECT(3),DFT(3),XT(3,3),YT(3)
DIMENSION XX(21),A(21),XE(3)
DFC = (DFT(3)*E+DFT(2))*E+DFT(1)
FC = (FT(3)*E+FT(2))*E+FT(1)
DO 1 I=1,NX
1 XE (I) = ( XT(I,3)*E+XT(I,2))*E+XT(I,1)
XC = XE(1)
EX = PARAM(2)*XC
EX = EXPF(EX)
AA = PARAM(1)*(1.+PARAM(2)*XC)*EX
A(1) = AA*XX(1) + EX*XC
A(2) = AA*XX(2) + EX*XC*XC*PARAM(1)
A(3) = AA*XX(3) + FC
RETURN
END
```



```
SUBROUTINE QUAS(K,E,XX,A)
COMMON /D/ F(500),DF(500),PARAM(6),DPAR(6)
COMMON/E/ PAS,N,NX,NP,NIT,NEX,PRECIS
COMMON /G/ FT(3),ECT(3),DFT(3),XT(3,3),YT(3)
DIMENSION XX(21),A(21),XE(3)
DFC = (DFT(3)*E+DFT(2))*E+DFT(1)
FC = (FT(3)*E+FT(2))*E+FT(1)
DO 1 I=1,NX
1 XE(I) = (XT(I,3)*E+XT(I,2))*E+XT(I,1)
XC = XE(1)
EX = PARAM(2)*XC
EX = EXPF(EX)
AA = PARAM(1)*(1.+PARAM(2)*XC)*EX
A(1) = AA*XX(1) - EX*PARAM(1)*XC*(1.+2.*PARAM(2)*XC)
A(2) = AA*XX(2) + EX*XC
A(3) = AA*XX(3) + EX*XC*XC*PARAM(1)
A(4) = AA*XX(4) + FC
RETURN
END
```



```

SUBROUTINE DET(TAB, NP, R)
DOUBLE PRECISION TAB, R, FACT, EPS, PIV
LOGICAL TEST
DIMENSION TEST(9)
DIMENSION TAB(6,6), ISUITE(6), NINV(6)
PIV = 0.
R=0 $ INV=0
DO 13 K=1, NP
TEST(K) = 0
13 ISUITE(K)=0
J=0
C ESSAI DE PROGRESSION
1 J=J+1
2 IDEB = ISUITE(J) + 1
IF (IDEB.GT.NP) GO TO 7
DO 10 I=IDEB, NP
IF (.NOT.TEST(I)) GO TO 4
10 CONTINUE
7 IF (J.EQ.1) GO TO 15
C RECU
3 ISUITE(J)=0
J=J-1
K= ISUITE(J)
TEST(K) = 0
INV = INV-NINV(J)
GO TO 2
C PASGENERATEUR
4 ISUITE(J) = I
TEST(I) = 1
NINV(J) = 0
IF (J.EQ.1) GO TO 1
JJ = J-1
DO 11 K=1, JJ
IF (I.GT.ISUITE(K)) GO TO 11
NINV(J) = NINV(J) + 1
11 CONTINUE
INV = INV + NINV(J)
IF (J.LT.NP) GO TO 1
C CALCUL DU FACTEUR
FACT = 1.
DO 12 K=1, NP
L = ISUITE(K)
12 FACT = FACT*TAB(K,L)
EPS = -1.
IPS = 2*(INV/2)-INV
IF (IPS.EQ.0) EPS=1.
R = R+ EPS*FACT
INV = INV-NINV(NP)
TEST(L) = 0
FACT = DABS (FACT)
PIV = DMAX1 (PIV, FACT)
GO TO 3
15 PIV = R/PIV
PIV = DABS(PIV)
IF (PIV.LT. 1.E-14) R=0.
RETURN

```



```
SUBROUTINE CONV(C)
LOGICAL NEX
COMMON/E/ PAS,N,NX,NP,NIT,NEX,PRECIS
COMMON /J/ A(500)
PAS3 = PAS/3.
SOM1 = A(2)+A(2)
SOM1 = SOM1+SOM1
SOM1 = PAS3*(A(1)+SOM1+A(3))
AUX1 = A(4)+A(4)
AUX1 = AUX1+AUX1
AUX1 = SOM1+PAS3*(A(3)+AUX1+A(5))
AUX2 = PAS3*(A(1)+3.875*(A(2)+A(5))+2.625*(A(3)+A(4)+A(6)))
SOM2 = A(5)+A(5)
SOM2 = SOM2+SOM2
SOM2 = AUX2-PAS3*(A(4)+SOM2+A(6))
C BOUCLE D INTEGRATION
AUX = A(3)+A(3)
AUX = AUX +AUX
NN = N-1
DO 4 I=7,N,2
  I1 = I-1
  I2 = I-2
  SOM1 = AUX1
  SOM2 = AUX2
  AUX1 = A(I1)+A(I1)
  AUX1 = AUX1 + AUX1
  AUX1 = SOM1 + PAS3*(A(I2)+AUX1+A(I))
  IF (I-N) 3,6,6
3  AUX2 = A(I)+A(I)
  AUX2 = AUX2+AUX2
  II = I+1
4  AUX2 = SOM2 + PAS3*(A(I1)+AUX2+A(II))
  C = AUX2
  RETURN
6  C=AUX1
  RETURN
END
```



```

SUBROUTINE INTERP
EXTERNAL FMODELE
LOGICAL NEX, ITRAC
COMMON /A/ Y(500)
COMMON /B/ X(3,500)
COMMON /D/ F(500), DF(500), PARAM(6), DPAR(6)
COMMON /E/ PAS, N, NX, NP, NIT, NEX, PRECIS
COMMON /H/ NMIN, NPAS, ITRAC, SECT
COMMON /I/ XZERO(21), NMAX
COMMON /STOCK/ IP, IC, ICODE, ITITRE(5), NPOINTS, XMIN, YMIN, XCHEL, YCHEL
NF = NX
VISCO = 1./ (SECT*PARAM(3))
YOUNG = -VISCO*PARAM(1)
VISCO = VISCO * 1.E7
PRINT 1, YOUNG, VISCO, PARAM(2)
1 FORMAT (///15X, *MODULE D YOUNG      *, E10.3, * HB*//
115X, *COEF DE VISCOSITE      *, E10.3, * PS*//
215X, *COEF D AMORTISMT      *, E10.3)
NN = N
N = NMAX
CALL VASY (XZERO, FMODELE, 1, NF)
PRINT 300, (X(1,K), K=1, NMAX)
300 FORMAT (///16X, *COURBE THEORIQUE*//250(2(10X, E10.3)/))
IF (.NOT. ITRAC) GO TO 4
PRINT 306
306 FORMAT (1H1)
YCHEL = 50.
XCHEL = .2
XMIN = 0.
YMIN = -0.01
IC = IC + 1
NPOINTS = 1
ICODE = 4
DO 2 K=1, NMAX
TEMPS = K-1
2 CALL TRACDAT (TEMPS, Y(K), 45)
ICODE = 1
DO 3 K=1, NMAX
IF (X(1,K).GT. Y(NMAX)) GO TO 4
TEMPS = K-1
CALL TRACDAT (TEMPS, X(1,K), 45)
3 ICODE = 5
4 N=NN
RETURN
END

```



CE PROGRAMME IDENTIFIE LES PARAMETRES P DU MODELE  
SUIVANT PAR ANALYSE DES ETATS X PAR RAPPORT AUX ENTREES F

$$DX/DT = P1.X.EXP(P2.X) + P3.F(T)$$



# ESSAI TRACTION 68-06

| F(T)      | Y(T)      | F(T)      | Y(T)      |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 2.400+000 | 3.000-003 | 4.000+000 | 5.000-003 |
| 5.600+000 | 6.000-003 | 7.000+000 | 7.000-003 |
| 8.200+000 | 8.000-003 | 9.200+000 | 9.000-003 |
| 1.020+001 | 1.100-002 | 1.120+001 | 1.200-002 |
| 1.200+001 | 1.300-002 | 1.280+001 | 1.400-002 |
| 1.360+001 | 1.500-002 | 1.460+001 | 1.700-002 |
| 1.540+001 | 1.800-002 | 1.620+001 | 1.900-002 |
| 1.720+001 | 2.000-002 | 1.820+001 | 2.200-002 |
| 1.920+001 | 2.400-002 | 2.040+001 | 2.500-002 |
| 2.140+001 | 2.700-002 | 2.240+001 | 2.800-002 |
| 2.360+001 | 3.100-002 | 2.480+001 | 3.300-002 |
| 2.600+001 | 3.600-002 | 2.740+001 | 3.800-002 |
| 2.860+001 | 4.000-002 | 2.980+001 | 4.400-002 |
| 3.100+001 | 4.700-002 | 3.240+001 | 5.000-002 |
| 3.360+001 | 5.400-002 | 3.480+001 | 5.700-002 |
| 3.600+001 | 6.100-002 | 3.660+001 | 6.500-002 |
| 3.860+001 | 7.000-002 | 3.980+001 | 7.400-002 |
| 4.100+001 | 7.900-002 | 4.200+001 | 8.500-002 |
| 4.320+001 | 9.000-002 | 4.460+001 | 9.700-002 |
| 4.580+001 | 1.040-001 | 4.650+001 | 1.120-001 |
| 4.800+001 | 1.200-001 | 4.920+001 | 1.300-001 |
| 5.000+001 | 1.400-001 | 5.120+001 | 1.500-001 |
| 5.220+001 | 1.630-001 | 5.320+001 | 1.680-001 |
| 5.360+001 | 1.920-001 | 5.400+001 | 2.100-001 |
| 5.440+001 | 2.300-001 | 5.440+001 | 2.500-001 |
| 5.440+001 | 2.740-001 | 5.400+001 | 3.000-001 |
| 5.280+001 | 3.200-001 |           |           |



# PARAMETRES DU CALCUL

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| NOMBRE DE POINTS            | 30        |
| PRECISION DE L'OPTIMISATION | 5.000-004 |
| TEMPS ELEMENTAIRE           | 2.1000 S. |
| NORME DE Y                  | 4.662-002 |

| NO       | DJ        | DJREL     | PAR1       | PAR2       | PAR3      |
|----------|-----------|-----------|------------|------------|-----------|
| GRADIENT |           |           |            |            |           |
| 1        | 1.477-005 | 3.168-004 | -3.807+000 | -9.241+000 | 3.779-003 |

|                   |              |
|-------------------|--------------|
| MODULE D YOUNG    | 3.358+002 HB |
| COEF DE VISCOSITE | 8.821+008 PS |
| COEF D AMORTISMT  | -9.241+000   |

## COURBE THEORIQUE

|           |           |
|-----------|-----------|
| 3.000-003 | 3.885-003 |
| 5.612-003 | 7.216-003 |
| 8.628-003 | 9.842-003 |
| 1.103-002 | 1.227-002 |
| 1.333-002 | 1.435-002 |
| 1.540-002 | 1.669-002 |
| 1.787-002 | 1.899-002 |
| 2.036-002 | 2.187-002 |
| 2.341-002 | 2.523-002 |
| 2.699-002 | 2.869-002 |
| 3.072-002 | 3.298-002 |
| 3.533-002 | 3.810-002 |
| 4.093-002 | 4.374-002 |
| 4.677-002 | 5.038-002 |
| 5.426-002 | 5.821-002 |
| 6.266-002 | 6.646-002 |
| 7.235-002 | 8.154-002 |
| 9.114-002 | 1.037-001 |
| 1.230-001 | 1.634-001 |
| 2.751-001 | 5.369-001 |
| 8.832-001 | 1.250+000 |
| 1.625+000 | 2.008+000 |
| 2.398+000 | 2.797+000 |
| 3.201+000 | 3.607+000 |
| 4.017+000 | 4.430+000 |
| 4.841+000 | 5.251+000 |
| 5.655+000 |           |



# PARAMETRES DU CALCUL

NOMBRE DE POINTS 35  
 PRECISION DE L OPTIMISATION 5.000-004  
 TEMPS ELEMENTAIRE 2.0000 S.  
 NORME DE Y 9.238-002

| NO       | DJ        | DJREL     | PAR1       | PAR2       | PAR3      |
|----------|-----------|-----------|------------|------------|-----------|
| GRADIENT |           |           |            |            |           |
| 1        | 2.826-004 | 3.059-003 | -3.807+000 | -9.241+000 | 3.779-003 |
| 2        | 1.208-004 | 1.307-003 | -1.314+000 | -9.089+000 | 1.355-003 |
| 3        | 2.643-005 | 2.861-004 | -7.965-001 | -9.125+000 | 8.323-004 |

IMODULE D YOUNG 3.190+002 HB

COEF DE VISCOSITE 4.005+009 PS

COEF D AMORTISMT -9.125+000

## COURBE THEORIQUE

|           |           |
|-----------|-----------|
| 3.000-003 | 3.516-003 |
| 5.021-003 | 6.692-003 |
| 8.243-003 | 9.619-003 |
| 1.089-002 | 1.217-002 |
| 1.338-002 | 1.448-002 |
| 1.558-002 | 1.680-002 |
| 1.809-002 | 1.928-002 |
| 2.059-002 | 2.209-002 |
| 2.365-002 | 2.538-002 |
| 2.723-002 | 2.902-002 |
| 3.096-002 | 3.315-002 |
| 3.548-002 | 3.804-002 |
| 4.084-002 | 4.368-002 |
| 4.665-002 | 4.991-002 |
| 5.350-002 | 5.722-002 |
| 6.121-002 | 6.519-002 |
| 6.958-002 | 7.541-002 |
| 8.157-002 | 8.836-002 |
| 9.595-002 | 1.050-001 |
| 1.161-001 | 1.293-001 |
| 1.452-001 | 1.662-001 |
| 1.931-001 | 2.280-001 |
| 2.734-001 | 3.302-001 |
| 3.980-001 | 4.744-001 |
| 5.571-001 | 6.439-001 |
| 7.324-001 | 8.216-001 |
| 9.101-001 |           |



# PARAMETRES DU CALCUL

NOMBRE DE POINTS

PRECISION DE L OPTIMISATION

TEMPS ELEMENTAIRE

NORME DE Y

40  
5.000-004  
2.0000 S.  
1.823-001

| NO       | DJ        | DJREL     | PAR1       | PAR2       | PAR3      |
|----------|-----------|-----------|------------|------------|-----------|
| GRADIENT |           |           |            |            |           |
| 1        | 8.262-004 | 4.531-003 | -7.965-001 | -9.125+000 | 8.323-004 |
| 2        | 2.168-004 | 1.189-003 | -5.678-001 | -9.096+000 | 6.081-004 |
| 3        | 5.014-005 | 2.750-004 | -4.069-001 | -9.193+000 | 4.473-004 |

MODULE D YOUNG 3.032+002 HB

COEF DE VISCOSITE 7.452+009 PS

COEF D AMORTISMT -9.193+000

## COURBE THEORIQUE

|           |           |
|-----------|-----------|
| 3.000-003 | 3.404-003 |
| 4.595-003 | 6.119-003 |
| 7.667-003 | 9.131-003 |
| 1.050-002 | 1.186-002 |
| 1.318-002 | 1.439-002 |
| 1.557-002 | 1.681-002 |
| 1.814-002 | 1.941-002 |
| 2.076-002 | 2.224-002 |
| 2.381-002 | 2.551-002 |
| 2.735-002 | 2.919-002 |
| 3.115-002 | 3.332-002 |
| 3.562-002 | 3.812-002 |
| 4.084-002 | 4.365-002 |
| 4.660-002 | 4.972-002 |
| 5.318-002 | 5.679-002 |
| 6.061-002 | 6.450-002 |
| 6.864-002 | 7.368-002 |
| 7.902-002 | 8.478-002 |
| 9.100-002 | 9.801-002 |
| 1.061-001 | 1.148-001 |
| 1.246-001 | 1.361-001 |
| 1.492-001 | 1.643-001 |
| 1.818-001 | 2.022-001 |
| 2.256-001 | 2.521-001 |
| 2.819-001 | 3.151-001 |
| 3.510-001 | 3.895-001 |
| 4.296-001 |           |



# PARAMETRES DU CALCUL

NOMBRE DE POINTS

PRECISION DE L OPTIMISATION

TEMPS ELEMENTAIRE

NORME DE Y

45  
5.000-004  
2.0000 S.  
3.677-001

| NO       | DJ        | DJREL     | PAR1       | PAR2       | PAR3      |
|----------|-----------|-----------|------------|------------|-----------|
| GRADIENT |           |           |            |            |           |
| 1        | 1.079-003 | 2.934-003 | -4.069-001 | -9.193+000 | 4.473-004 |
| 2        | 1.902-004 | 5.173-004 | -3.225-001 | -9.325+000 | 3.631-004 |
| 3        | 5.498-005 | 1.495-004 | -2.779-001 | -9.483+000 | 3.178-004 |

MODULE D YOUNG 2.914+002 HB

COEF DE VISCOSITE 1.049+010 PS

COEF D AMORTISMT -9.483+000

## COURBE THEORIQUE

|           |           |
|-----------|-----------|
| 3.000-003 | 3.356-003 |
| 4.362-003 | 5.725-003 |
| 7.193-003 | 8.649-003 |
| 1.006-002 | 1.146-002 |
| 1.283-002 | 1.412-002 |
| 1.538-002 | 1.668-002 |
| 1.804-002 | 1.938-002 |
| 2.076-002 | 2.227-002 |
| 2.386-002 | 2.555-002 |
| 2.740-002 | 2.928-002 |
| 3.127-002 | 3.343-002 |
| 3.573-002 | 3.823-002 |
| 4.093-002 | 4.374-002 |
| 4.670-002 | 4.986-002 |
| 5.328-002 | 5.686-002 |
| 6.067-002 | 6.458-002 |
| 6.873-002 | 7.357-002 |
| 7.869-002 | 8.418-002 |
| 9.005-002 | 9.655-002 |
| 1.038-001 | 1.116-001 |
| 1.201-001 | 1.298-001 |
| 1.405-001 | 1.524-001 |
| 1.657-001 | 1.805-001 |
| 1.970-001 | 2.149-001 |
| 2.345-001 | 2.559-001 |
| 2.787-001 | 3.029-001 |
| 3.282-001 |           |



# PARAMETRES DU CALCUL

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| NOMBRE DE POINTS            | 50        |
| PRECISION DE L OPTIMISATION | 5.000-004 |
| TEMPS ELEMENTAIRE           | 2.0000 S. |
| NORME DE Y                  | 7.822-001 |

| NO       | DJ        | DJREL     | PAR1       | PAR2       | PAR3      |
|----------|-----------|-----------|------------|------------|-----------|
| GRADIENT |           |           |            |            |           |
| 1        | 4.503-004 | 5.756-004 | -2.779-001 | -9.483+000 | 3.178-004 |
| 2        | 2.376-004 | 3.037-004 | -2.754-001 | -9.370+000 | 3.174-004 |

IMODULE D YOUNG 2.893+002 HB

COEF DE VISCOSITE 1.050+010 PS

COEF D AMORTISMT -9.370+000

## COURBE THEORIQUE

|           |           |
|-----------|-----------|
| 3.000-003 | 3.365-003 |
| 4.377-003 | 5.748-003 |
| 7.223-003 | 8.688-003 |
| 1.010-002 | 1.152-002 |
| 1.290-002 | 1.419-002 |
| 1.546-002 | 1.676-002 |
| 1.813-002 | 1.948-002 |
| 2.087-002 | 2.238-002 |
| 2.398-002 | 2.570-002 |
| 2.756-002 | 2.944-002 |
| 3.143-002 | 3.359-002 |
| 3.590-002 | 3.839-002 |
| 4.110-002 | 4.391-002 |
| 4.687-002 | 5.002-002 |
| 5.344-002 | 5.702-002 |
| 6.081-002 | 6.471-002 |
| 6.884-002 | 7.365-002 |
| 7.873-002 | 8.418-002 |
| 9.000-002 | 9.643-002 |
| 1.036-001 | 1.113-001 |
| 1.197-001 | 1.292-001 |
| 1.397-001 | 1.512-001 |
| 1.643-001 | 1.787-001 |
| 1.949-001 | 2.124-001 |
| 2.315-001 | 2.522-001 |
| 2.744-001 | 2.981-001 |
| 3.227-001 |           |



A N N E X E B

---

PLANCHES

- -



0.35

0.30

0.25

0.20

0.15

0.10

0.05

0.00

0.05

0.10

0.15

0.20

0.25

0.30

0.35

0.40

0.45

0.50

0.55

0.60

0.65

0.70

0.75

0.80

0.85

0.90

0.95

Courbe expérimentale

Identification

Extrapolation

Courbe théorique

4 46 COURBE D'ESSAI 16/03/70 15/44/42

Planche I : - Modèle linéaire (rigidité constante).



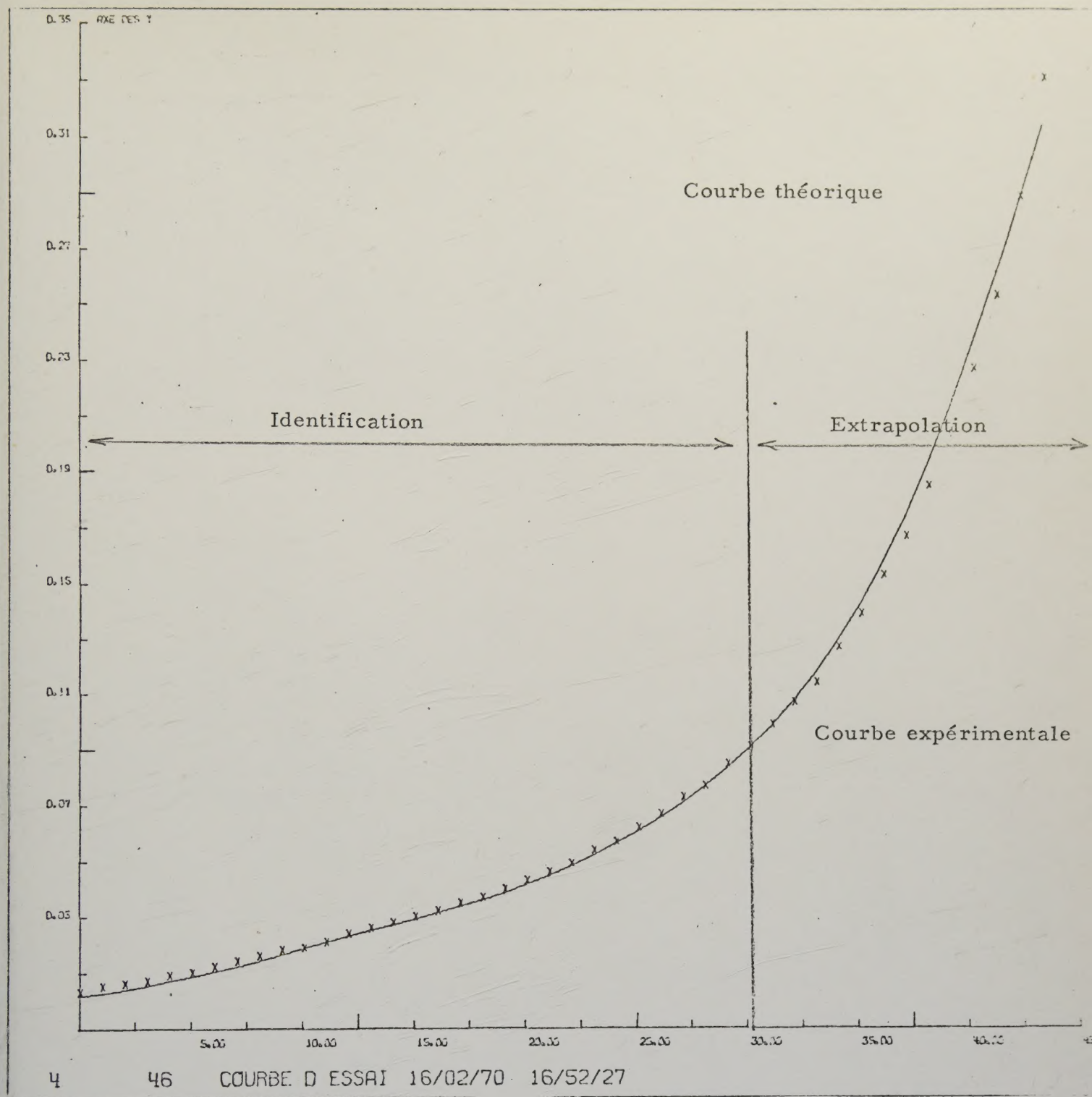


Planche II : - Modèle à rigidité exponentielle.





